problemas de FISICA GENERAL

FELIX A. GONZALEZ
M. MARTINEZ HERNANDEZ

SEGUNDA EDICION
EDITORIAL TEBAR FLORES

problemas de FISICA GENERAL

FELIX A. GONZALEZ
M. MARTINEZ HERNANDEZ

Editorial TEBAR FLORES
Gaztambide, 61
MADRID-15

D.L. AB-192-1978
I.S.B.N. 84-7360-021-5
IMPRESO EN ARTES GRAFICAS FLORES
Carretera de Barrax,5 ALBACETE

CAPITULO I

VECTORES

I-1. Descomponer un vector $\vec{v}$ dirigido según $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ y modulo $\sqrt{27}$ unidades según las direcciones de los vectores $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{k}+\vec{i}$.

****

Para hallar la proyección de un vector sobre otro se halla el producto escalar del vector que queremos proyectar por el vector unitario que lleva la dirección del segundo.

Proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{a}$ es: $\vec{v}\cdot\vec{u}_a$ siendo $\vec{u}_a$ el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$.

Para hallar el vector $\vec{v}$ calculemos sus cosenos directores que son los de $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ que cumplen $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$

Como sabemos que $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, tendremos $3\cos^2\alpha=1$

o sea: $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

por tanto $v_x=\sqrt{27}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=3$; $v_y=3$; $v_z=3$

luego: $\vec{v}=3\,\vec{i}+3\,\vec{j}+3\,\vec{k}$

Los vectores unitarios en dirección de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ serán:

$$\vec{u}_a=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})\qquad \vec{u}_b=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k})\qquad \vec{u}_c=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k}+\vec{i})$$

Las componentes buscadas serán:

$$v_a=\vec{v}\cdot\vec{u}_a=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$$v_b=\vec{v}\cdot\vec{u}_b=3\sqrt{2}$$

$$v_c=\vec{v}\cdot\vec{u}_c=3\sqrt{2}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

I-2. Si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ probar que $(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \times \vec{a})$

****

De la condición $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ obtenemos $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ (I)

multiplicamos los dos miembros vectorialmente por $\vec{b}$:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$$

como $\vec{b} \times \vec{b} = 0$ queda $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$

Analogamente si multiplicamos vectorialmente por $\vec{a}$ en (I) :

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} = -\vec{c} \times \vec{a}$$

$\vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c} \times \vec{a}$ cómo $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ queda $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c} \times \vec{a}$

o sea $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}}$

=.=.=.=.=.=.=.=

I-3. Sea el vector deslizante $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ que pasa por el punto P(3,1,-2). Calcular el momento del vector respecto al punto A(1,0,1) y al eje que pasa por los puntos A(1,0,1) y B(1,2,1).

****

$$\vec{r} = \overrightarrow{AP} = (3-1)\,\vec{i} + (1-0)\,\vec{j} + (-2-1)\,\vec{k}$$

$$M_A\,\vec{a} = \overrightarrow{AP} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\,\vec{j}$$

Como el punto A se encuentra sobre el eje, bastará proyectar sobre él, el momento antes calculado.

$$\mathfrak{M}_a = M_A\,\vec{a}\cdot\vec{u}$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ se encuentra sobre el eje: $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{j}$

luego el vector unitario $\vec{u} = \vec{j}$

por tanto:

$$\mathfrak{M}_a = (\vec{i} - 2\,\vec{j})\cdot\vec{j} = \underline{\underline{-2}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

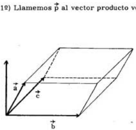
I-4. 1º) Demostrar que $\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c})$ es igual en valor absoluto al volumen del paralelopípedo de aristas $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
2º) Comprobar que

$$\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & b_y & c_z \end{vmatrix}$$

3º) Aplicación para $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ $\quad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{k}$ $\quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

****

1º) Llamemos $\vec{p}$ al vector producto vectorial $|\vec{b} \times \vec{c}|$.



$\vec{p}$ será un vector perpendicular a la base del paralelepípedo y su módulo es igual al área del paralelogramo base.

Ahora $\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{a}\ \vec{p}\ \cos\alpha$

$a\cos\alpha$ es la proyección sobre la perpendicular a la base del vector $\vec{a}$ y esto es la altura del paralelepípedo

luego $\vec{a} \cdot \vec{p} = S \cdot h = V$

queda demostrado que

$$V = \vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c})$$

2º)

$$\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \left[(b_yc_z - b_zc_y)\vec{i} + (b_zc_x - b_xc_z)\vec{j} + (b_xc_y - b_yc_x)\vec{k} \right] =$$

$$= a_x(b_yc_z - b_zc_y) + a_y(b_zc_x - b_xc_z) + a_z(b_xc_y - b_yc_x) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

3º)

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

=.=.=.=.=.=.=

I-5. Hallar el vector unitario tangente a cualquier punto de la curva:

$$x = t^2 + 1$$
$$y = 2t - 1$$
$$z = 3t^2 - 2t$$

Aplicación $t = 1$

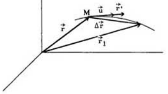
****

El vector derivada de $\vec{r}$ es $\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt}$ y es tangente a la curva en M.

En este caso :

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + (6t - 2)\,\vec{k}$$

El vector unitario en dirección de $\vec{r}\,'$ será : $\vec{u} = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$



o sea :

$$\vec{u} = \frac{2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + (6t - 2)\,\vec{k}}{\sqrt{4t^2 + 4 + (6t - 2)^2}} =$$

$$= \frac{2t\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + (6t - 2)\,\vec{k}}{\sqrt{40t^2 - 24t + 8}}$$

para t = 1 :

$$u = \frac{2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(\vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k})$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

I-6. Demostrar la relación vectorial: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

****

Para simplificar las operaciones tomaremos: El eje 0X a lo largo del vector $\vec{c}$ y el eje 0Y en el plano determinado por los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Podemos expresar los tres vectores de la forma siguiente

$$\vec{c} = c_x\,\vec{i}$$

$$\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

Efectuemos la operación del primer miembro de la igualdad dada

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times \left[(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) \times c_x\vec{i}\right] = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (-b_y\,c_x\vec{k}) = a_x b_y\,c_x\vec{j} - a_y\,b_y\,c_x\vec{i}$$

Ahora

$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} = \left[(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}).\,c_x\vec{i}\right](b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = a_x\,c_x(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = a_x b_x c_x\vec{i} + a_x b_y\,c_x\vec{j}$$

y

$$(\vec{a}.\vec{b})\,\vec{c} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) \quad c_x\vec{i} = (a_x b_x + a_y b_y)c_x\vec{i} = a_x b_x c_x\vec{i} + a_y b_y c_x\vec{i}$$

por tanto

$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\,\vec{c} = a_x b_y c_x\vec{j} - a_y b_y c_x\vec{i}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

I-7. Demostrar que se verifica:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\,(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{b}\times\vec{c})\,(\vec{a}\times\vec{d}) + (\vec{c}\times\vec{a})(\vec{b}\times\vec{d}) = 0$$

****

Demostraremos en primer lugar :

$$(\vec{a}\times\vec{b})\,(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

hagamos $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{r}$

entonces $\vec{r}\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{d}\,(\vec{r}\times\vec{c}) = \vec{d}\,\left|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\right|$

pero $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\times\vec{c} = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$

quedará $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\,\left|\vec{c}\times\vec{d}\right| = \vec{d}\left|\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})\right|$

y $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\,\left|\vec{c}\times\vec{d}\right| = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$

aplicando esta igualdad obtendremos :

$$\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\,\left|\vec{a}\times\vec{d}\right| = (\vec{b}\cdot\vec{a})\,(\vec{c}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{d})\,(\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|\,\left|\vec{b}\times\vec{d}\right| = (\vec{c}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{d}) - (\vec{c}\cdot\vec{d})\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Sustituyendo en la igualdad que nos dan quedará :

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\,(\vec{b}\cdot\vec{c}) + (\vec{b}\cdot\vec{a})\,(\vec{c}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{d})\,(\vec{c}\cdot\vec{a}) +$$
$$+ (\vec{c}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{d}) - (\vec{c}\cdot\vec{d})\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

que evidentemente es igual a cero .

=.= =.=.=.=.=.=.=

I-8. Demostrar vectorialmente que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

****

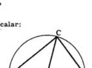
Bastará demostrar que el producto escalar:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$$

En la figura observamos que:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$$

y $$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$$



por tanto:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

pero $\quad \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} \qquad \overline{CO} = \overline{OA} = R$

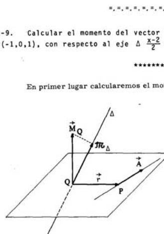
luego $\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overline{CO}^2 - \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA} - \overline{OA}^2 = 0$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

I-9. Calcular el momento del vector A (2,-4,0) que pasa por el punto P(-1,0,1), con respecto al eje $\Delta \ \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = z-1$

****

En primer lugar calcularemos el momento del vector A con respecto a un punto Q (2, 3, 1) cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación del eje



$$\vec{M}_Q = \left[\vec{r}\times\vec{A}\right] = \overrightarrow{QP}\times\vec{A}$$

$$\overrightarrow{QP} = (-1-2)\,\vec{i}+(0-3)\,\vec{j}+(1-1)\,\vec{k} = -3\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$$

por tanto :

$$\vec{M}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 18\,\vec{k}$$

El vector unitario $\vec{u}$ sobre el eje será :

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

siendo $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ los cosenos directores del eje .

Para calcular dichos cosenos : $\dfrac{\cos\alpha}{2} = \dfrac{\cos\beta}{2} = \dfrac{\cos\gamma}{1} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

por tanto $\quad : \quad \cos\alpha = \frac{2}{3} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{2}{3} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}$

y el vector $\quad \vec{u} = \frac{1}{3}(2\,\vec{i}+2\,\vec{j}+\vec{k})$

El momento respecto a Δ será la proyección de M_Q sobre dicho eje .

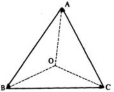
$$\mathfrak{M}_\Delta = \vec{M}_Q\cdot\vec{u} = 6$$

=.=.=.=.=.=.=

I-10. Demostrar que si en un tetraedro dos pares de aristas opuestas son perpendiculares también lo son las otras dos.

Sean AB y BC perpendiculares a OC y OA respectivamente. Se verifica:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$$
$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$$



Hallemos el valor de la suma

$$S = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

nos quedará:

$$S = (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$$

luego las aristas CA y OB tambien son perpendiculares.

=.=.=.=.=.=.=.=

I-11. Un sistema de tres vectores paralelos que forman el mismo ángulo con los tres ejes coordenados, tienen por módulos 4,6,12 y se aplican en los puntos respectivos A(2,1,0) B(-1,1,3) y C(1,1,-1). Calcular:

1°) La resultante del sistema
2°) El centro de vectores del sistema
3°) El momento respecto al origen
4°) El eje central

****

1º) Teniendo en cuenta que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ y que $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$, tendremos $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

y los tres vectores serán:

$$\vec{v}_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

$$\vec{v}_2 = \frac{6}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

$$\vec{v}_3 = \frac{12}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

y la resultante $\vec{R} = \dfrac{22}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ y $\underline{\underline{R = 22}}$

2º)

$$X_G = \frac{\sum v_i x_i}{R} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{3}}}{22} = \frac{7\sqrt{3}}{33}$$

$$Y_G = \frac{\sum v_i y_i}{R} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{3}}}{22} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$Z_G = \frac{\sum v_i z_i}{R} = \frac{\frac{18}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}}}{22} = \frac{\sqrt{3}}{11}$$

3º) Como el momento del sistema respecto a G es cero.

$$\vec{M}_o = \vec{M}_G + \vec{OG} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{7}{33} & \frac{1}{3} & \frac{1}{11} \\ 22 & 22 & 22 \end{vmatrix} = \frac{16}{3}\vec{i} - \frac{88}{33}\vec{j} - \frac{88}{33}\vec{k}$$

4º) Como $R_x = R_y = R_z$

la ecuación del eje central quedará:

$$M_x - yR_z + zR_y = M_y - zR_x + xR_z = M_z - xR_y + yR_x$$

en nuestro caso $\frac{16}{3} - \frac{22}{\sqrt{3}}y + \frac{22}{\sqrt{3}}z = -\frac{88}{33} - \frac{22}{\sqrt{3}}z + \frac{22}{\sqrt{3}}x = -\frac{88}{33} - \frac{22}{\sqrt{3}}x + \frac{22}{\sqrt{3}}y$

Ecuación de la recta eje central $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = \frac{4\sqrt{3}}{11} \end{cases}$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

I-12. Dados los vectores: $\vec{v}_1$ situado en la recta que pasando por origen de coordenadas tiene los cosenos directores proporcionales a 0,3,4 y de módulo 10; $\vec{v}_2$ de componentes (1,-1,-2) y momento respecto al origen igual a $\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{v}_3$ de componentes (-1,0,1) y situado en la recta de acción que pasa por el punto de coordenadas (2,-1,2). Calcular la resultante y el momento resultante respecto al origen.

****

Las proyecciones del vector $\vec{v}_1$ sobre los ejes coordenados son proporcionales a 0, 3, 4.

o sea $\frac{v_{1x}}{0} = \frac{v_{1y}}{3} = \frac{v_{1z}}{4} = \frac{\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

por tanto $v_{1x} = 0$ $\quad v_{1y} = 6$ $\quad v_{1z} = 8$

$$\vec{v}_1 = 6\vec{j} + 8\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$
$$\vec{v}_3 = -\vec{i} + \vec{k}$$

y la resultante $\boxed{\vec{R} = 5\vec{j} + 7\vec{k}}$

el momento de $\vec{v}_1$ respecto al origen es igual a cero, ya que está situado sobre una recta que pasa por el origen.
El momento de $\vec{v}_2$ es dado:

$$\vec{M}_{o(\vec{v}_2)} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

el momento de $\vec{v}_3$ será:

$$\vec{M}_{o(\vec{v}_3)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

El momento resultante:

$$\boxed{\vec{M}_o = -\vec{j} + \vec{k}}$$

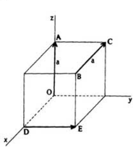
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

I-13. Dado un sistema de vectores deslizantes distribuidos sobre 3 aristas de un cubo en la forma que indica la fig. Hallar: 1°) La resultante dels sistema 2°) El momento mínimo 3°) La ecuación del eje central.

****

1º) Los tres vectores dados son

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{k}$$
$$\overrightarrow{BC} = -a\vec{i}$$
$$\overrightarrow{DE} = a\vec{j}$$



la resultante del sistema será

$$\vec{R} = -a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$$

2º El vector momento mínimo es

$$\vec{m} = \frac{\vec{M}\cdot\vec{R}}{R^2}\vec{R}$$

Vamos a calcular el momento resultante del sistema respecto al origen de coordenadas

$$\vec{M}_o(\overrightarrow{OA}) = 0$$
$$\vec{M}_o(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{BC} = (a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}) \times (-a\vec{i}) = a^2\vec{k} - a^2\vec{j}$$
$$\vec{M}_o(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{DE} = a\vec{i} \times a\vec{j} = a^2\vec{k}$$

de donde $\quad \vec{M}_o = -a^2\vec{j} + 2a^2\vec{k} \quad$ momento resultante respecto al origen.

luego $$\vec{m} = \frac{(-a^2\vec{j} + 2a^2\vec{k})(-a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k})}{a^3}(-a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}) =$$

$$= \frac{-a^3 + 2a^3}{a^3}\cdot(-a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}) = -a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$$

3º) La ecuación del eje central es

$$\frac{M_x-(yR_z-zR_y)}{R_x}=\frac{M_y-(zR_x-xR_z)}{R_y}=\frac{M_z-(xR_y-yR_x)}{R_z}$$

sustituyendo valores nos quedará . $\frac{az-ay}{-a}=\frac{-a^2+az+ax}{a}=\frac{2a^2-ax}{a}$

o también $\left.\begin{matrix} x+y=a \\ x+z=2a \end{matrix}\right\}$ Ecuación de la recta eje central del sistema

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.

I-14. 1º) Hallar el gradiente del campo escalar $U = x^2+y^2+z^2$
2º) Hallar la divergencia del gradiente anteriormente calculado.
3º) Hallar la divergencia y el rotacional del campo vectorial
$\vec{a} = (2x^3+y^3+z^3)\vec{i} + (x^3+2y^3+z^3)\vec{j} + (x^3+y^3+2z^3)\vec{k}$
4º) Hallar los productos $\vec{a}\cdot\nabla U$ y $\vec{a}\times\nabla U$

****

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = 2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}+2z\,\vec{k} = 2(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})$$

2º) La divergencia es el producto escalar de ∇ por ∇U

$$\operatorname{div}\nabla U = \nabla\cdot\nabla U = \frac{\partial(2x)}{\partial x}+\frac{\partial(2y)}{\partial y}+\frac{\partial(2z)}{\partial z} = 6$$

3º)

$$\nabla\,\vec{a} = \frac{\partial(2x^3+y^3+z^3)}{\partial x}+\frac{\partial(x^3+2y^3+z^3)}{\partial y}+\frac{\partial(x^3+y^3+2z^3)}{\partial z} = 6(x^2+y^2+z^2)$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 3(y^2-z^2)\,\vec{i}+3(z^2-x^2)\,\vec{j}+3(x^2-y^2)\,\vec{k}$$

4º) $\vec{a}\,\nabla U = 2x(2x^3+y^3+z^3)+2y(x^3+2y^3+z^3)+2z(x^3+y^3+2z^3) =$

$= 4x^4+2xy^3+2xz^3+2x^3y+4y^4+2yz^3+2x^3z+2y^3z+4z^4 =$

$= 4(x^4+y^4+z^4)+2xy(x^2+y^2)+2xz(x^2+z^2)+2yz(y^2+z^2)$

$$\vec{a}\times\nabla U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x^3+y^3+z^3 & x^3+2y^3+z^3 & x^3+y^3+2z^3 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left[(x^3z+2y^3z+z^4-x^3y-y^4-2z^3y)\,\vec{i} + (x^4+xy^3+2z^3x-zy^3-z^4-2x^3z)\,\vec{j} + (y^4+2x^3y+yz^3-x^4-2y^3x-z^3x)\,\vec{k}\right] = 2(z-y)\,(x^3+y^3+z^3-yz^2-z^2y)\,\vec{i} + 2(x-z)\,(x^3+y^3+z^2-2zx^2-2x^2z)\,\vec{j} + 2(y-z)\,(x^3+y^3+z^3-2xy^2-2x^2y)\,\vec{k}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

I-15. Sea la función potencial $V = \frac{k}{r}$ siendo k una constante positiva y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Comprobar que

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

****

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{k}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{kx}{r^3}$$

Analogamente
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{ky}{r^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{kz}{r^3}$$

Calculemos: $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{kx}{r^3}\right) = -\frac{k}{r^3} + kx\frac{3x}{r^5} = -\frac{k}{r^3} + \frac{3kx^2}{r^5}$$

luego
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{k}{r^3} + \frac{3ky^2}{r^5}$$

y
$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{k}{r^3} + \frac{3kz^2}{r^5}$$

por tanto:
$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{3k}{r^3} + 3k\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = -\frac{3k}{r^3} + \frac{3kr^2}{r^5} = 0$$

=.=.=.=.=.=.=.=

I-16. 1º) Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos campos vectoriales, demostrar que se cumple la siguiente igualdad:

$$\mathrm{div}\,(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\mathrm{rot}.\vec{a} - \vec{a}\cdot\mathrm{rot}.\vec{b}$$

2º) Demostrar que si U es un campo escalar y $\vec{a}$ un campo vectorial, entre ellos existe la relación:

$$\mathrm{rot}\;U\cdot\vec{a} = U\;\mathrm{rot}\;\vec{a} + \left[(\mathrm{grad}\;U)\times\vec{a}\right]$$

3º) Comprobar dichas relaciones cuando:

$$\vec{a} = 2xy\ \vec{i} - xy^2\ \vec{j} + yz\vec{k}$$

$$\vec{b} = x^2y\ \vec{i} - z^2x\ \vec{k}$$

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

****

1º) Sabemos que

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k}$$

por tanto

$$\operatorname{div}\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \frac{\partial(a_y b_z - a_z b_y)}{\partial x} + \frac{\partial(a_z b_x - a_x b_z)}{\partial y} + \frac{\partial(a_x b_y - a_y b_x)}{\partial z} =$$

$$= b_z\frac{\partial a_y}{\partial x} + a_y\frac{\partial b_z}{\partial x} - b_y\frac{\partial a_z}{\partial x} - a_z\frac{\partial b_y}{\partial x} + a_z\frac{\partial b_x}{\partial y} + b_x\frac{\partial a_z}{\partial y} - b_z\frac{\partial a_x}{\partial y} - a_x\frac{\partial b_z}{\partial y} +$$

$$+ b_y\frac{\partial a_x}{\partial z} + a_x\frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x\frac{\partial a_y}{\partial z} - a_y\frac{\partial b_x}{\partial z} = \left[b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\right] - \left[a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) + a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) + a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \vec{b}\ \operatorname{rot}\ \vec{a} - \vec{a}\ \operatorname{rot}\ \vec{b}$$

2º)

$$\operatorname{rot}\ U\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U a_x & U a_y & U a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial U a_z}{\partial y} - \frac{\partial U a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial U a_x}{\partial z} - \frac{\partial U a_z}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial U a_y}{\partial x} - \frac{\partial U a_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(U\frac{\partial a_z}{\partial y} + a_z\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial a_y}{\partial z} - a_y\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(U\frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial a_z}{\partial x} - a_z\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(U\frac{\partial a_y}{\partial x} + a_y\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial a_x}{\partial y} - a_x\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{k} = \left[U\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + U\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}\right.$$

$$\left. + U\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right] + \left[\left(a_z\frac{\partial U}{\partial y} - a_y\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(a_x\frac{\partial U}{\partial z} - a_z\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(a_y\frac{\partial U}{\partial x} - a_x\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{k}\right] =$$

$$= U\ \operatorname{rot}\ \vec{a} - \left[\left[\operatorname{gra} U\right]\times\vec{a}\right]$$

3º)

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2xy & -xy^2 & yz \\ x^2y & 0 & -z^2x \end{vmatrix} = x^2y^2z^2\,\vec{i} + (x^2y^2z + 2x^2yz^2)\,\vec{j} + x^3y^3\,\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = 2xy^2z^2 + 2x^2yz + 2x^{2\ 2}$$

$$\vec{b}\,.\operatorname{rot}\vec{a} = x^2y\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - z^2x\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = x^2yz - z^2x\,(-y^2 - 2x) =$$

$$= x^2yz + xy^2z^2 + 2x^2z^2$$

$$\vec{a}.\operatorname{rot}\vec{b} = 2xy\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) - xy^2\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) + yz\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) =$$

$$= -x\,y^2z^2 - x^2yz$$

luego $\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}.\operatorname{rot}\vec{b} = 2xy^2z^2 + 2x^2yz + 2x^2z^2$ c.q.d.

$$\operatorname{rot} U\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy(x^2+y^2+z^2) & -xy^2(x^2+y^2+z^2) & yz(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \left[z(x^2+3y^2+z^2) + 2xy^2z\right]\vec{i} + 2xyz\,\vec{j} - \left[y^2(3x^2+y^2+z^2) + \right.$$

$$\left. + 2x\,(x^2+3y^2+z^2)\right]\vec{k}$$

$$U\operatorname{rot}\vec{a} = U\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right] =$$

$$= z\,(x^2+y^2+z^2)\,\vec{i} - (y^2+2x)\,(x^2+y^2+z^2)\,\vec{k}$$

$$\left[\operatorname{grad} U\times\vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 2xy & -xy^2 & yz \end{vmatrix} = (2y^2z + 2xy^2z)\,i + 2xyz\,\vec{j} -$$

$$- (2x^2y^2 - 4xy^2)\,\vec{k}$$

queda:

$$U\operatorname{rot}\vec{a} + \left[\operatorname{grad} U\times\vec{a}\right] = \left[z(x^2+3y^2+z^2) + 2xy^2z\right]\vec{i} + 2xyz\,\vec{j} - \left[y^2(3x^2+y^2+z^2) + \right.$$

$$\left. + 2x(x^2+3y^2+z^2)\right]\vec{k}$$

=.=.=.=.=.=.=.= =

I-17. Sea el campo de vectores $\vec{a} = \frac{3x^2-y^2}{x^2}\vec{i} + \frac{2y}{x}\vec{j}$

1º) Comprobar que existe función potencial U
2º) Calcular U
3º) Ecuaciones de las lineas de campo

****

1º) Es un campo plano y nos basta comprobar que:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}$$

2º)

$$U = \int_{x_0}^{x} \frac{3x^2-y^2}{x^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{2y}{x_0}\,dy = 3x + \frac{y^2}{x} + K$$

3º) El vector campo en un punto de las lineas de campo es tangente a la linea de campo en dicno punto, ó sea:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

en este caso: $\frac{x^2dx}{3x^2-y^2} = \frac{x\,dy}{2y}$

quedará: $\frac{x\,dx}{3x^2-y^2} = \frac{dy}{2y}$

que podemos escribir: $\frac{2x\,dx}{6x^2-2y^2} = \frac{2y\,dy}{4y^2} = \frac{2x\,dx - 2y\,dy}{6x^2-6y^2} = \frac{1}{6}\frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2}$

nos quedará: $3\frac{dy}{y} = \frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2}$

e integrando obtenemos la ecuación de las lineas de campo

$$y^3 + K(y^2-x^2) = 0$$

=.=.=.=.=.=.=.=

I-18. Dado el campo vectorial $\vec{a} = 2xz\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)\vec{k}$

1º) Comprobar que dicho campo deriva de un escalar U
2º) Calcular U
3º) Determinar la superficie de nivel o equipotencial que pasa por el punto (1,2,1)

****

1º) $\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0\end{aligned}\right\}\qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$

Analogamente se cumple:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = y$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = 2x$$

2º) $U = \int_{x_0}^{x} 2xz\,dx + \int_{y_0}^{y} yz\,dy + \int_{z_0}^{z}\left(x_0^2 + \frac{y_0^2}{2}\right)dz = x^2z + \frac{y^2z}{2} + C = z\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) + C$

3º) En el punto $(1,2,1)$

$$U_{(1,2,1)} = 3 + C$$

$$U - C = 3 = z\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)$$

$$\boxed{z\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = 3}$$

=.=.=.=.=.=.=

I-19. Dado el escalar $U = x^3 + y^3 + z^3$ calcular la circulación de su gradiente cuando se pasa, por un camino cualquiera, del punto más alto al punto más bajo de la intersección del eje z con la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

****

Los puntos de intersección los obtenemos **del sistema**:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

serán por tanto $(0,0,-2)$ y $(0,0,2)$

$$C = \int_c \vec{a}\,\vec{dl} = \int \text{grad}\,U\,\vec{dl} = \int_0 dU = U_2 - U_1 = 8 - (-8) = \underline{16}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

I-20. Calcular la circulación del vector $\vec{a} = (x^2 - 2yz)\vec{i} + (y+xz)\vec{j} + (1 - 2xyz^2)\vec{k}$ entre los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.

a) A lo largo del segmento de vector que une $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$

b) A lo largo de los segmentos de $(0,0,0)$ a $(0,0,1)$, de $(0,0,1)$ a $(0,1,1)$ y de $(0,1,1)$ a $(1,1,1)$

c) A lo largo de la curva: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$

****

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$ es $x = y = z$ por tanto :

$$C_1 = \int_C \vec{a}\,dl = \int_C (x^2 - 2yz)dx + (y + xz)dy + (1 - 2xyz^2)dz =$$

$$= \int_0^1 (\cancel{-x^2} + x + \cancel{x^2} + 1 - 2x^4)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - 2\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{11}{10}$$

b) La circulación a lo largo del segmento de (0, 0, 0) a (0, 0, 1) será :

$$C_2' = \int_0^1 dz = 1$$

sin mas que tener en cuenta que en este caso $x = 0$, $y = 0$ y también $dx = dy = 0$
Analogamente a lo largo del segmento de (0, 0, 1) a (0, 1, 1) tenemos que tener en cuenta que $x = 0$, $z = 1$ y por tanto $dx = 0$, $dz = 0$

$$C_2'' = \int_0^1 y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1/2$$

A lo largo del camino (0, 1, 1) a (1, 1, 1) tendremos $y = 1$ $z = 1$ $dy = dz = 0$

$$C_3''' = \int_0^1 (x^2 - 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

Sumando $C_2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} = -1/6$

c) $$C_3 = \int \vec{a}\, d\vec{l} = \int (x^2 - 2yz)\, dx + (y + xz)\, dy + (1 - 2xyz^2)dz$$

sabemos que :

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{array}\right\}$$

y por tanto

$$\left.\begin{array}{l} dx = dt \\ dy = 2tdt \\ dz = 2t^2dt \end{array}\right\}$$

sustituyendo :

$$C_3 = \int_0^1 (t^2 - 2t^5)dt + (t^2 + t^4)2tdt + (1 - 2t^9)3t^2dt = \frac{4}{3}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

I-21. Dado un campo vectorial $\vec{a}$ y un campo escalar $U = x^2 + y^2 + z^2$, calcular el flujo a traves de la esfera $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ del campo vectorial obtenido sumando el gradiente de U y el rotacional de $\vec{a}$

****

El campo vectorial será:

$$\vec{V} = \text{grad } U + \text{rot } \vec{a} = \nabla U + \nabla \times \vec{a}$$

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \iint_R \vec{V} \cdot ds = \iint_R (\nabla U + \nabla \times \vec{a})\, ds = \iiint_V \text{div}(\nabla U + \nabla \times \vec{a})\, dV =$$

$$= \iiint_V \operatorname{div} \nabla\ U\, dV + \iiint_V \operatorname{div}\, (\nabla \times \vec{a})\, dV$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial x}\ \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial x}\ \vec{k} = 2x\ \vec{i} + 2y\ \vec{j} + 2z\ \vec{k}$$

$$\operatorname{div} \nabla U = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \nabla U\, dV = \iiint_V 6\, dV = 6 \iiint_V dV = 6 \cdot \frac{4}{3}\, \pi R^3 = 8 \pi R^3$$

Sabemos que la divergencia del rotacional de un vector es igual a 0, luego:

$$\iiint_V \operatorname{div}\, (\nabla \times \vec{a})\, dV = 0$$

El flujo pedido será: $\Phi = 8 \pi R^3$

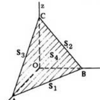
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

I-22. a) Calcular el flujo del vector $\vec{a} = xy\ \vec{i} - x^2\ \vec{j} + (x+z)\vec{k}$ a traves de la superficie del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $2x + 2y + z = 6$

b) Comprobar el resultado obtenido por aplicación del teorema de Gauss.

****

a) Vamos a llamar S_1, S_2, S_3, S_4 a la superficie de las caras OAB, OBC, OAC y ABC respectivamente. Entonces:



$$\Phi = \Phi_{s_1} + \Phi_{s_2} + \Phi_{s_3} + \Phi_{s_4}$$

$$\Phi = \iint_{s_1} \vec{a}\, d\vec{S}_1 = \iint_{s_1} \vec{a}\, \vec{n}\, dS_1$$

en este caso : $\vec{n} = -\vec{k}$ y $z = 0$

luego:

$$\Phi_{s_1} = -\iint_{s_1} (x+z)\, dxdy = -\iint x\, dxdy = -\int_0^3 x\, dx \int_0^{3-x} dy = -\int_0^3 (3-x)\, x\, dx =$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx = -9/2$$

Para calcular Φ_2 tendremos en cuenta que $\vec{n} = -\vec{i}$

$$\Phi_{s_2} = -\iint_{s_2} xy\, dydz = 0 \qquad \text{ya que} \qquad x = 0$$

Analogamente calcularemos Φ_3 siendo $\vec{n} = -\vec{j}$ e $y = 0$

$$\Phi_{s_3} = \iint_{s_3} x^2 dxdz = \int_0^3 x^2 dx \int_0^{6-2x} dz = \int_0^3 (6-2x)x^2 dx = \int_0^3 (6x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{27}{2}$$

El vector gradiente es perpendicular a la superficie S_4 y para obtener $\vec{n}$, en este caso, obtendremos $\nabla(2x+2y+z-6) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, cómo $\vec{n}$ es vector unitario:

$$\vec{n} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{9}} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$$

$$\Phi_{s_4} = \frac{1}{3}\iint_{s_4} (2xy - 2x^2 + x + z)\,dS = \frac{1}{3}\iint_{s_4} (2xy - 2x^2 + x + 6 - 2x - 2y)\,dS$$

quedará:

$$\Phi_4 = \frac{1}{3}\iint_{s_4} (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6)\,dS$$

$$dS = \frac{dS_1}{\cos\gamma} \qquad y \qquad \cos\gamma = \frac{\vec{n}\,\vec{k}}{|\vec{n}|\,|\vec{k}|} = 1/3$$

luego $\quad dS = 3dS_1$

nos quedará:

$$\Phi_4 = \iint_R (2xy - 2x^2 - x - 2y + 6)\,dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2xy - 2x^2 - x - 2y - 6)\,dy = \frac{27}{4}$$

por tanto: $\qquad \Phi = -\frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{27}{4} = \frac{63}{4}$

b) Vamos a calcular: $\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = y + 1$$

luego:
$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV = \iiint_V (y+1)\,dxdydz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{2(3-x-y)} (1+y)\,dz =$$

$$= 2\int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left[(2-x)y - y^2 + (3-x)\right] dy = 2\int_0^3 (3-x^2)\,\frac{6-x}{6}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (54 - 45x + 12x^2 - x^3)\,dx = \underline{\underline{\frac{63}{4}}}\,.$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

C A P I T U L O II

C I N E M A T I C A

II-1. Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo a arriba con 2 seg. de intervalo, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de 80 m/s.

¿Cual será el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentrer a la misma altura?¿A que altura sucedera?¿Que velocidad tendrá cada uno en ese momento? Tomese g = 9'80 m/s .

****

Si llamamos t al tiempo transcurrido desde que se lanza el segundo proyectil hasta el momento del encuentro. Tendremos

$$\left. 50\,(t+2) - \frac{1}{2}\,9,8\,(t+2)^2 = 80t - \frac{1}{2}\,9,8\,t^2 \right\} \text{se encuentran cuando } H_1 = H_2$$

operando nos quedará

$$t = \frac{50 - 9,8}{15 + 9,8} = \frac{40,2}{24,8} = 1,62 \text{ seg.}$$

desde que se lanzó el primero habrá transcurrido $t' = t + 2 = 3,62$ seg.
la altura a la que se encuentra será :

$$h = 80 \cdot 1,62 - \frac{1}{2}\,9,8 \cdot 1,62^2 = 116,74 \text{ m.}$$

la velocidad del primero en el punto de encuentro será :

$$v_1 = 50 - 9,8 \cdot 3,62 = 14,53 \text{ m/s.}$$

y la velocidad del segundo en ese momento será :

$$v_2 = 80 - 9,8 \cdot 1,62 = 64,12 \text{ m/s.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

II-2. Un movil M_1 se dirige con velocidad constante v_1 hacia un punto 0 y otro movil M_2 se aleja de 0 con velocidad constante v_2. Las trayectorias de M_1 y M_2 son lineas rectas y forman entre si un ángulo α. Si, en el instante en que la distancia $d = M_1 M_2$ es minima, llamamos x_1 a $M_1 0$ y x_2 a $0M_2$, comprobar que se verifica

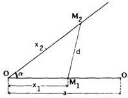
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{v_2 + v_1 \cos\alpha}{v_1 + v_2 \cos\alpha}$$

****

En el instante t cualquiera

$$x_1 = a - v_1 t$$

$$x_2 = v_2 t$$



por tanto :

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{(a-v_1t)^2 + v_2^2t^2 - 2v_2t(a-v_1t)\cos\alpha}$$

hallemos la derivada de d :

$$d' = \frac{-2v_1(a-v_1t) + 2v_2^2t - 2v_2(a-v_1t)\cos\alpha + 2v_1v_2t\cos\alpha}{2\left[(a-v_1t)^2 + v_2^2t^2 - 2v_2t(a-v_1t)\cos\alpha\right]}$$

para hallar el mínimo hagamos $d' = 0$, nos quedará :

$$-2v_1a + 2v_1^2t + 2v_2^2t - 2v_2a\cos\alpha + 4v_1v_2t\cos\alpha = 0$$

por tanto $t = \dfrac{a(v_1 + v_2\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}$

y sustituyendo en los valores de x_1 y x_2 , tendremos :

$$x_1 = a - \frac{av_1(v_1 + v_2\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha} = \frac{av_2(v_2 + v_1\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}$$

$$x_2 = \frac{av_2(v_1 + v_2\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}$$

dividiendo miembro a miembro :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{v_2 + v_1\cos\alpha}{v_1 + v_2\cos\alpha} \qquad \text{c. q. d.}$$

=.=.=.=.=.=.=

II-3. Un automotor parte del reposo, en una via circular de 400 m. de radio, y va moviendose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los 50 segundos de iniciada su marcha, alcanza la velocidad de 72 Km/h desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar:

1º) La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.

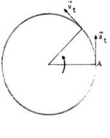
2º) La aceleración normal, la aceleracion total y la longitud de via recorrida en ese tiempo, en el momento de cumplirse los 50 egundos.
3º) La velocidad angular media en la primera etapa, y la velocidad angular al cabo de 50 segundos.
4º) Tiempo que tarda el automotor en dar 100 vueltas al circuito.

****

1º)

$$v_t = \frac{72000}{3600} = 20 \text{ m/s.}$$

$$v_t = a_t \cdot t \quad ; \quad a_t = \frac{v_t}{t} = \frac{20}{50} = \underline{\underline{0,4 \text{ m/s}^2}}$$



2º)

$$a_n = \frac{v_t^2}{R} = \frac{400}{400} = \underline{\underline{1 \text{ m/s}^2}}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1,16} = \underline{\underline{1,07 \text{m/s}^2}}$$

$$l = \frac{1}{2} a_t t^2 = \frac{1}{2} 0,4 \cdot 2500 = \underline{\underline{500 \text{ m.}}}$$

3º)

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ rad/seg.}$$

$$\omega_m = \frac{\varphi}{t} = \frac{1/2\ \alpha\ t^2}{t} = \frac{1}{2} \alpha\, t = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,4}{400}\, 50 = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ rad/seg.}$$

4º)

$$t = 50 \quad \frac{100 \cdot 2\pi\ R - 500}{20} = \underline{\underline{12.585 \text{ seg.}}}$$

=.=.=.=.=.-

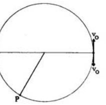
II-4. Dos moviles parten del mismo punto de una circunferencia y tienen la misma velocidad inicial v_o aunque salen en sentidos opuestos. Uno de los movimientos es acelerado y el otro retardado, pero el módulo de su aceleración y deceleración respectivos es el mismo

a) Calcular el valor de a_t sabiendo que el móv 1 dotado de movimiento retardado en el instante del encuentro lleva velocidad nula.
b) Hallar la aceleración total de cada uno de los móviles en el momento del encuentro

****

a)

$$s_1 = v_o t + \frac{1}{2} a_t t^2$$



$$s_2 = v_o t - \frac{1}{2} a_t t^2$$

Sumando ambas igualdades :

$$2\pi R = 2 v_o t \quad ; \quad t = \frac{\pi R}{v_o}$$

Como la velocidad del segundo , en el momento del encuentro, es cero

$$v_o - a_t t = 0$$

de donde $\quad a_t = \frac{v_o}{t} = \boxed{\frac{v_o^2}{\pi R}}$

b) El que lleva movimiento retardado :

$$a = a_t = \frac{v_o^2}{\pi R}$$

ya que al ser, en ese instante, su velocidad nula no tiene a_n

El que lleva movimiento acelerado

$$v = v_o + a_t t = v_o + v_o = 2 v_o$$

y $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4 v_o^2}{R}$$

luego $$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{16 v_o^4}{R^2} + \frac{v_o^4}{\pi^2 R^2}} = \frac{v_o^2}{\pi R} \sqrt{16\pi^2 + 1}$$

=.=.=.=.=.=.=

II-5. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 2t^2$, $y = t^2-4t$, $z = 3t-5$, donde t es el tiempo. Hallar los componentes de su velocidad y aceleración en la dirección dada por el vector $\vec{r} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ cuando $t = 1$

****

El vector velocidad será: $\vec{v} = 4t\,\vec{i} + (2t-4)\,\vec{j} + 3\vec{k}$

para hallar su proyección sobre una dirección paralela a $\vec{r}$, bastará multiplicar escalarmente $\vec{v}$ por el vector unitario en la dirección del vector $\vec{r}$ ó sea:

$$v_r = (4t\,\vec{i} + (2t-4)\,\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot \frac{\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}} = \frac{4t - 3(2t-4) + 6}{\sqrt{14}}$$

cuándo $t = 1$ $$v_r = \frac{4 - 3(2-4) + 6}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

El vector aceleración será:

$$\vec{a} = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

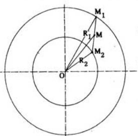
por tanto:
$$a_r = \vec{a}\,\vec{u} = (4\,\vec{i} + 2\,\vec{j})\,\frac{\vec{i} - 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}}{\sqrt{14}} = \frac{4-6}{\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

II-6. Dos móviles M_1 y M_2, describen en el mismo sentido dos circulos concéntricos de radios R_1 y R_2, con velocidades angulares constantes ω_1 y ω_2 respectivamente. Siendo M el punto medio de $\overline{M_1M_2}$, calcular la velocidad de dicho punto M en aquel instante en que su distancia al centro de los circulos sea mínima. Considerese $R_1 > R_2$ y $\omega_1 > \omega_2$.

****

En un instante t cualquiera las coordenadas de M_1 y M_2 son:



$$M_1 \begin{cases} x_1 = R_1 \cos \omega_1 t \\ y_1 = R_1 \operatorname{sen} \omega_1 t \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} x_2 = R_2 \cos \omega_2 t \\ y_2 = R_2 \operatorname{sen} \omega_2 t \end{cases}$$

Las coordenadas del punto M serán:

$$M \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - x_2}{2} = \dfrac{R_1 \cos \omega_1 t - R_2 \cos \omega_2 t}{2} \\[2ex] y = \dfrac{y_1 - y_2}{2} = \dfrac{R_1 \operatorname{sen} \omega_1 t - R_2 \operatorname{sen} \omega_2 t}{2} \end{cases}$$

Las componentes de la velocidad del punto M serán:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{-R_1\,\omega_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + R_2\,\omega_2 \operatorname{sen} \omega_2 t}{2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{R_1\,\omega_1 \cos \omega_1 t - R_2\,\omega_2 \cos \omega_2 t}{2}$$

de donde:

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2\,\omega_1^2 + R_2^2\,\omega_2^2 - R_1 R_2\,\omega_1\,\omega_2\left[\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \operatorname{sen} \omega_1 t \operatorname{sen} \omega_2 t\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2\,\omega_1^2 + R_2^2\,\omega_2^2 - 2R_1 R_2\,\omega_1\,\omega_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t}$$

pero:

$$d = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 R_2^2 - 2R_1 R_2\left[\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \operatorname{sen} \omega_1 t \operatorname{sen} \omega_2 t\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)}$$

derivando:

$$d' = \frac{1}{2}\ \frac{R_1R_2(\omega_1-\omega_2)\operatorname{sen}(\omega_1-\omega_2)t}{\sqrt{R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(\omega_1-\omega_2)t}}$$

para que d sea mínimo $d' = 0$ $\qquad \operatorname{sen}(\omega_1-\omega_2)t = 0$

y por tanto $\cos(\omega_1-\omega_2)t = 1$

sustituyendo este valor en la expresión de la velocidad del punto M, nos quedará:

$$v = \frac{1}{2}\ \sqrt{R_1^2\omega_1^2+R_2^2\omega_2^2-2R_1R_2\omega_1\omega_2} = \frac{1}{2}(R_1\omega_1-R_2\omega_2)$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

II-7. Un móvil que parte del origen de coordenadas recorre la parábola $x^2 = 2y$, en que x e y estan expresados en metros, de tal forma que la proyección del movimiento sobre el eje OX es un movimiento uniforme de velocidad $V_o = 2$ m/seg. Hallar, al cabo de $t = \sqrt{2}$ seg.: 1º) El módulo de la velocidad. 2º) Las componentes intrínsecas de la aceleración. 3º) El radio de curvatura para el instante considerado.

****

1º) La tangente en el vertice es el eje OX, por tanto $V_x = V_o$ y $x = V_o t$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(\frac{x^2}{2})}{dt} = x\,\frac{dx}{dt} = xV_o \Rightarrow V = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \sqrt{V_o^2+x^2V_o^2} =$$

$$= V_o\sqrt{1+V_o^2t^2}$$

sustituyendo valores

$$V = 2\sqrt{1+4\times 2} = 6 \text{ m/s}$$

2º) La eceleración total del móvil es

$$\left.\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{d(V_o^2t)}{dt} = V_o^2 \end{array}\right\} \qquad a = \sqrt{a_x^2+a_y^2} = V_o^2 = 4 \text{ m.s}^{-2}$$

La aceleración tangencial es

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{V_o^3t}{\sqrt{1+V_o^2t^2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{1+8}} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ m/s}^2$$

y

$$a_n = \sqrt{a^2-a_t^2} = \sqrt{16-\frac{128}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \text{ m/s}^2$$

3º) como $$a_n = V^2/\rho$$

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{6}{4/3} = \frac{18}{4} = 4{,}5 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

II-8. Un móvil describe una trayectoria dada por las ecuaciones

$$x = pt$$

$$y = \frac{1}{2}\, pt^2$$

Determinar:
1º) Velocidad y aceleración del móvil
2º) Componentes intrínsecos
3º) Radio de curvatura

****

1º)
$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = p \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = pt \end{aligned}\right\} \qquad \vec{v} = p\,\vec{i} + pt\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= p \end{aligned}\right\} \qquad \vec{a} = p\,\vec{j}$$

2º) La aceleración tangencial es $a_t = \frac{dv}{dt}$

siendo $$v = \sqrt{p^2 + p^2t^2} = p\sqrt{1 + t^2}$$

por tanto $$a_t = \frac{pt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

el módulo del vector $\vec{a}$ es $a = p$

y sabemos que $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

luego $$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{p^2 - \frac{p^2t^2}{1+t^2}} = \frac{p}{\sqrt{1+t^2}}$$

3º) Sabemos que $$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

de donde $$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{p^2(1+t^2)}{\dfrac{p}{\sqrt{1+t^2}}} = p\,(1 + t^2)^{3/2}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

II-9. Una partícula se mueve en el espacio con una velocidad dada por:

$$\vec{v} = e^t\vec{i} + mt^2\vec{j} - \frac{1}{3}t^3\vec{k}$$

siendo m una constante. Calcular:

1°) El vector de posición de la partícula en función de t, sabiendo que en el instante t = 0 la partícula se encuentra en el punto (0,0,1).

2°) El radio de curvatura de la trayectoria en t = 0

3°) Valor de la constante m para que la trayectoria fuera plana.

4°) Calcular el momento de la velocidad respecto al punto P(1,1,1) para m = 1, t = 1.

5°) Momento axial de la velocidad respecto al eje que pasando por P es paralelo al vector $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ para m = 1 y t = 1.

****

1º) Sabemos que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}dt$

integrando:

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt = \int (e^t\vec{i} + mt^2\vec{j} - \frac{1}{3}t^3\vec{k})\,dt =$$

$$= e^t\vec{i} + \frac{mt^3}{3}\vec{j} - \frac{1}{12}t^4\vec{k} + x_o\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k}$$

para t = 0 $\quad \vec{r}_o = (1 + x_o)\vec{i} + y_o\vec{j} + z_o\vec{k} = \vec{k}$

luego

$$\left.\begin{array}{r} 1 + x_o = 0 \\ y_o = 0 \\ z_o = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_o = -1 \\ y_o = 0 \\ z_o = 1 \end{array}\right.$$

y el vector posición será:

$$\vec{r} = (e^t - 1)\vec{i} + \frac{m}{3}t^3\vec{j} + \left(1 - \frac{t^4}{12}\right)\vec{k}$$

2º) Cuando t = 0 $\quad \vec{v} = \vec{i}$

además $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = e^t\vec{i} + 2mt\vec{j} - t^2\vec{k} \quad$ y para t = 0 $\Rightarrow \vec{a} = \vec{i}$

la aceleración tangencial es:

$$\vec{a}_t = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0}\frac{\vec{v}}{v} = \vec{i}$$

la aceleración normal será:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = \vec{i} - \vec{i} = 0$$

como $\quad \rho = \frac{v^2}{a_n} \Rightarrow \rho = \infty$

3º) Para m=0, la trayectoria será plana ya que entonces se verificará:

$$\vec{r} = (e^t - 1)\vec{i} + \quad 1 - \frac{t^4}{12}\quad\vec{k}$$

y al curva estará contenida en el plano $y = 0$

4º) Para $a = 1$, $t = 1$, el vector velocidad es: $\vec{v} = e\,\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{3}\,\vec{k}$

Llamando Q al punto de aplicación del vector $\vec{v}$, el momento de dicho vector respecto al punto P, será:

$$\vec{M}_P = (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{v}$$

siendo $\quad \vec{r}_Q = (e - 1)\,\vec{i} + \frac{1}{3}\,\vec{j} + \frac{11}{12}\,\vec{k} \quad$ y $\quad \vec{r}_P = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, luego:

$$\vec{M} = \left[(e-2)\,\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{12}\,\vec{k}\right] \times \left[e\,\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{3}\,\vec{k}\right] = \frac{11}{36}\,\vec{i} - \left(\frac{2}{3} - \frac{e}{4}\right)\vec{j} + \left(\frac{5}{3}\,e - 2\right)\vec{k}$$

5º) Para calcular el momento respecto al eje pedido, bastará proyectar sobre dicho eje el momento con respecto al punto P, calculado en el punto anterior.

$$\mathfrak{M} = \vec{M}\cdot\vec{u} = \frac{\vec{M}\cdot\vec{s}}{s} = \frac{\frac{11}{36} - \frac{2}{3} + \frac{e}{4} + \frac{5}{3}\,e - 2}{\sqrt{3}} = \frac{69\,e - 85}{36\,\sqrt{3}} = \frac{(69\,e - 85)\,\sqrt{3}}{108}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

II-10. El movimiento de un punto referido a unos ejes coordenados Oxy es:

$$x = R(t - \text{sen } t)$$
$$y = R(1 - \cos t)$$

Hallar:
1º) La velocidad, aceleración y componentes intrinsecos
2º) Radio de curvatura
3º) Hodógrafa del movimiento

****

1º)
$$v_x = \frac{dx}{dt} = R\,(1 - \cos t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = R\,\text{sen}\,t$$

El vector velocidad será:

$$\boxed{\vec{v} = R\,(1 - \cos t)\,\vec{i} + R\,\text{sen}\,t\,\vec{j}}$$

y su módulo:

$$v = \sqrt{R^2(1-\cos t)^2 + R^2\text{sen}^2 t} = R\,\sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \text{sen}^2 t} = R\,\sqrt{2(1 - \cos t)}$$

como: $\quad 1 - \cos t = 2\,\text{sen}^2\,\frac{t}{2}$

quedará
$$\boxed{v = 2R\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}$$

Para calcular la aceleración

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = R\,\text{sen}\,t$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = R\cos t$$

el vector aceleración será: $\vec{a} = R\,\text{sent}\,\vec{i} + R\cos t\,\vec{j}$

y su módulo $a = \sqrt{R^2 \text{sen}^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$

la aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \underline{-R\cos\frac{t}{2}}$$

la aceleración normal es:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\frac{t}{2}} = R\,\text{sen}\,\frac{t}{2}$$

2º) Teniendo en cuenta que: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

tendremos:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4R^2 \text{sen}^2\frac{t}{2}}{R\text{sen}\frac{t}{2}} = 4R\,\text{sen}\frac{t}{2}$$

3º) Hagamos $X = v_x$ e $Y = v_y$

escribiremos

$$X = R\,(1 - \text{cost})$$
$$Y = R\,\text{sent}$$

para eliminar t

$$\text{sent} = \frac{Y}{R}$$

$$\text{cost} = \frac{R - X}{R}$$

como $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

queda $Y^2 + (R - X)^2 = R^2$

o sea $\boxed{X^2 + Y^2 - 2RX = 0}$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

II-11. Un cañón dispara un proyectil con una velocidad v_1 y un ángulo de tiro α, este proyectil alcanza en 10 sg. un objetivo situado en el mismo plano horizontal. Si desde el mismo punto y con otro cañón se dispara un nuevo proyectil con una velocidad v_2 y ángulo de tiro 2α, se alcanzaría el mismo objetivo en 15 sg. Calcular:

1º) La tangente del primer ángulo de tiro

2º) La distancia entre el punto de lanzamiento y el objetivo.

****

Llamando L a la distancia buscada, tendremos

$$L = v_1 t_1 \cos\alpha = \frac{v_1^2\,\text{sen}\,2\alpha}{g}$$

$$L = v_2 t_2 \cos 2\alpha = \frac{v_2^2\,\text{sen}\,4\alpha}{g}$$

de la primera expresión obtenemos $v_1 = \dfrac{g t_1}{2 \operatorname{sen}\alpha}$

de la segunda $v_2 = \dfrac{g t_2}{2 \operatorname{sen} 2\alpha}$

Entonces

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{g t_1^2 \cos\alpha}{2 \operatorname{sen}\alpha} = \frac{g t_1^2}{2 \operatorname{tg}\alpha} \\ L &= \frac{g t_2^2 \cos 2\alpha}{2 \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{g t_2^2}{2 \operatorname{tg} 2\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \frac{t_1^2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{t_2^2}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

quedará $\dfrac{t_1^2}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{t_2^2 (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{2 \operatorname{tg}\alpha}$ $\qquad 2t_1^2 = t_2^2 - t_2^2 \operatorname{tg}^2\alpha$

y $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{t_2^2 - 2t_1^2}{t_2^2}} = \sqrt{\dfrac{225 - 200}{225}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$

por tanto $\qquad L = \dfrac{g t_1^2}{2 \operatorname{tg}\alpha} = \underline{\underline{1.470 \text{ m.}}}$

=.=.=.=.=.=.=

II-12. Un móvil situado inicialmente en el origen de coordenadas tiene una velocidad incial v_0 en el sentido positivo de los x, simultáneamente se le comunican dos aceleraciones constantes, una dirigida en el sentido de las X negativas y otra en el sentido positivo del eje OY. El módulo de ambos es a.

1º) La trayectoria del móvil

2º) Coordenadas del punto en que la velocidad sea mínima y calcular esta velocidad mínima.

****

1º) El movimiento componente según la horizontal es uniformemente retardado y de velocidad inicial v_o, el movimiento vertical es uniformemente acelerado y sin velocidad inicial,

sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = v_o t - \frac{1}{2} a t^2 \\ y = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

para eliminar t, sumemos ambas ecuaciones:

queda: $\qquad x + y = v_o t \qquad$ y $\qquad t = \dfrac{x + y}{v_o}$

sustituyendo en la segunda ecuación del movimiento:

$$y = \frac{1}{2} a \frac{(x+y)^2}{v_o^2}$$

operando $$\boxed{x^2 + y^2 + 2xy - \frac{2v_o^2}{a} y = 0}$$

2º) Como
$$v_x = v_o - at$$
$$v_y = at$$

tendremos $$v^2 = v_o^2 + 2a^2t^2 - 2v_o at$$

cuyo mínimo corresponde a $$t = \frac{v_o}{2a}$$

por tanto $$v_m = \sqrt{v_o^2 + 2a^2 \frac{v_o^2}{4a^2} - v_o} = \frac{v_o \sqrt{2}}{2}$$

Las coordenadas del punto buscado serán:

$$x_m = \frac{v_o^2}{2a} - \frac{1}{2} a \frac{v_o^2}{4a^2} = \frac{3v_o^2}{8a} \qquad y_m = \frac{1}{2} a \frac{v_o^2}{4a^2} = \frac{v_o^2}{8a}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

II-13. Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo de 30^o con la horizontal y, al llegar a su extremo, queda en libertad con una velocidad de 10m/s. La altura del edificio es 60 m. y la anchura de la calle a la que vierte el tejado 30 m. Calcular:

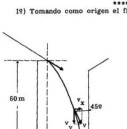
1º) Ecuaciones del movimiento de la pelota al quedar en libertad y ecuación de la trayectoria

2º) ¿Llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta?

3º) Posición en que se encuentra cuando su velocidad forma un ángulo de 45°con la horizontal

****

1º) Tomando como origen el final del tejado y como ejes:



OX el horizontal
OY vertical y positivo en sentido descendente.

Tendremos:

$$x = v_o t \cos 30$$
$$y = v_o t \,\text{sen} 30 + \frac{1}{2} g t^2$$

o sea
$$\left.\begin{array}{l} x = 5\sqrt{3}\,t \\ y = 5t + 5t^2 \end{array}\right\}$$

Para hallar la ecuación de la trayectoria eliminamos t,

$$t = \frac{x}{5\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{5x}{5\sqrt{3}} + \frac{5x^2}{75} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{x\sqrt{3}}{3} + \frac{x^2}{15}}$$

2º) Basta hallar la intersección de la recta $x = 30$ m. con la parabola

$$y = \frac{30\sqrt{3}}{3} + \frac{900}{15} = 67 \text{ m.}$$

luego llega directamente al suelo.

3º) Si la velocidad forma 45º con la horizontal.

$$\operatorname{tg} 45 = \frac{v_y}{v_x} = 1 \qquad v_x = v_y$$

entonces $\quad 5\sqrt{3} = 5 + 10t \qquad t = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} = 0,36$

Las coordenadas del punto buscado son:

$$x = 3,1 \text{ m.}$$
$$y = 2,24 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=.=

II-14. En un rio cuya anchura es de 10 m. y cuyas aguas llevan una velocidad constante de 18 Km/h. intenta cruzar un fuera-borda, cuyo peso total es de 150 Kg., y cuyo motor le impulsa con una fuerza constante de 5 Newton. Suponiendo que la posición del fuera-borda sea siempre perpendicular a las orillas. Calcular:

a) Tiempo que tardará en cruzar.

b) Desviación de la normal a la orilla que sufrirá el fuera-borda al cruzar el rio.

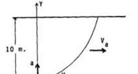
c) Ecuación del movimiento.

****

a) La aceleración que el motor imprime a la barca es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5}{150} = \frac{1}{30} \text{ m s}^{-2}$$

y su dirección es, en todo momento perpendicular a las orillas del rio



Las ecuaciones paramétricas del movimiento son

$$x = V_a t$$
$$y = \frac{1}{2} a t^2$$

cuando el fuera-borda llegue a la orilla opuesta $y = 10$ m, luego

$$t = \sqrt{\frac{24}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 10}{1/30}} = \sqrt{600} =$$

$$= 10\sqrt{6} \text{ seg.} = 24,49 \text{ seg.}$$

b) La desviación de la normal que sufrirá

$$x = V_a t = 5 \times 24,49 = 122,45 \text{ m.}$$

c) Eliminemos t en las ecuaciones del movimiento

$$t = \frac{x}{V_a} \Rightarrow y = \frac{1}{2} a \frac{x^2}{V_a^2} \qquad \text{que es una parábola}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

II-15. En un terreno se lanza una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 10 m/seg. El viento produce una fuerza horizontal constante sobre la pelota que es igual a la quinta parte del peso de esta. Se pide:

a) La distancia L, entre el impacto y el punto del lanzamiento
b) Velocidad de la pelota en el punto mas alto de la trayectoria.
c) Altura máxima que alcanzará la pelota
d) Velocidad de la pelota en el momento del impacto.
e) Angulo que forma la velocidad en impacto, con la horizontal.

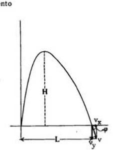
Tomese $g = 10 \text{ m/s}^2$

****

a) Las ecuaciones paramétricas del movimiento de la pelota son:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} a t^2 \\ y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

siendo $a = \frac{F}{m} = \frac{\frac{1}{5} m g}{m} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/s}^2$



Sustituyendo valores las ecuaciones quedan así:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 10t - 5t^2 \end{cases}$$

En el punto del impacto y=0

por tanto $\qquad 10t - 5t^2 = 0 \qquad t = 2 \text{ seg.}$

y $\qquad L = t^2 = 2^2 = 4\text{m}$

b) En el punto mas alto, como $v_y = 0$, $v = v_x$

$$v = at = \underline{\underline{2 \text{ m/s}}}$$

c) En el punto mas alto $v_y = 0$

$$v_y = \sqrt{v_0^2 - 2gH} \qquad H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{100}{20} = \underline{\underline{5 \text{ m}}}$$

d) $v_x = at = 2\,2 = 4\,m/s$

$v_y = v_0 - gt = 10 - 20 = -10\,m/s$ $\Big\}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}\ m/s$

e) $tg\,\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{10}{4} = -\underline{2,5}$

=.=.=.=.=.=.=

II-16. Una canoa de masa m que lleva inicialmente una velocidad v_0 se ve frenada por una fuerza de rozamiento $F=-be^{av}$ siendo a y b constantes.

1º) Calcular el tiempo que tarda en pararse

2º) Calcular la distancia que recorre hasta detenerse

****

1º) La fuerza de rozamiento comunica a la canoa una aceleración que vendrá dada por la ecuación:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}e^{av}$$

de donde

$$dt = -\frac{b}{m}e^{-av}\,dv$$

integrando esta ecuación teniendo en cuenta que para $t = 0$, $v = v_0$, quedará:

$$t = -\frac{m}{b}\int_{v_0}^{v} e^{-av}\,dv = \frac{m}{ab}\left[e^{-av} - e^{-av_0}\right]$$

Para calcular x en función de v, partimos de $dx = v\,dt$, o sea:

$$dx = -\frac{m}{b}e^{av}v\,dv$$

Integrando de nuevo, obtenemos

$$x = -\frac{m}{b}\int_{v_0}^{v} ve^{-av}\,dv = -\frac{m}{b}\left[\left[-\frac{v}{a}e^{-av}\right]_{v_0}^{v} + \frac{1}{a}\int_{v_0}^{v} e^{-av}\,dv\right]$$

$$x = \frac{m}{a^2b}\left[ave^{av} - av_0e^{av_0} + e^{av} - e^{-av_0}\right]$$

cuándo se detiene $v = 0$ luego $t = \frac{m}{ab}\left[1 - e^{-av_0}\right]$

2º) Igualmente si $v = 0$

$$x = \frac{m}{a^2b}\left[1 - e^{-av_0} - av_0e^{-av_0}\right]$$

=.=.=.=.=.=.=.=

II-17. Un cohete se lanza verticalmente al espacio. Suponemos que la aceleración de la gravedad sigue la ley $g = g_0 - k_3t$, donde t es el tiempo y g_0 la aceleración de la gravedad en el instante inicial. Los 10 primeros segundos actua sobre el cohete, debido a los gases, una fuerza $F_1 = K_1M$, donde M es la masa del cohete en cada instante.

A partir de los 10 segundos iniciales la fuerza que impulsa al cohete vale $F_2 = K_2 M$.
Se pide calcular la altura alcanzada al cabo de 60 seg.
Datos: $g_o = 10\ m/s^2$; $K_1 = 2$ Kg peso/kg masa ; $K_2 = 15\ m/s^2$; $K_3 = 0,1\ m/s^3$

****

La aceleración en la primera etapa es:

$$a_1 = \frac{F_1 - P}{M} = \frac{K_1 M - (g_o - K_3 t) M}{M} = K_1 - g_o + K_3 t = 10 + 0,1t$$

como $dv = a\,dt$

integrando $\int_0^v dv = \int_0^t (10 + 0,1t)\,dt$ ó sea $v = 10t + 0,05t^2$

en el instante $t = 10$ $v_{10} = 100 + 0,05 \cdot 100 = 105\ m/s$

sabemos que $dy = v\,dt$

integrando $\int_0^y dy = \int_0^t (10t + 0,05t^2)\,dt$ o sea $y = 5t^2 + \frac{0,05}{3}t^3$

en el instante $t = 10$ $y_{10} = 500 + \frac{0,05}{3}1000 = \frac{1550}{3}\ m$

En la segunda etapa la aceleración del cohete será:

$$a_2 = \frac{F_2 - P}{M} = \frac{K_2 M - (g_o - K_3 t) M}{M} = K_2 - g_o + K_3 t = 5 + 0,1t$$

siguiendo el mismo proceso anterior, tendremos:

$$\int_{v_{10}}^v dv = \int_{10}^t (5 + 0,1)t\,dt$$

$$v - 105 = \left[5t + 0,05t^2\right]_{10}^t = 5t + 0,05t^2 - 55$$

por tanto $v = 50 + 5t + 0,05t^2$

volviendo a integrar $\int_{y_{10}}^y dy = \int_{10}^{60} (50 + 5t + 0,05t^2)\,dt$

$$y - \frac{1550}{3} = \left[50t + \frac{5}{2}t^2 + \frac{0,05}{3}t^3\right]_{10}^{60} = 14850 - \frac{50}{3}$$

luego $\boxed{y = 15350\,m}$

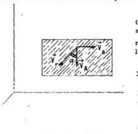
=.=.=.=.=.=

II-18. Las gotas de lluvia que caen verticalmente sobre el suelo marcan huellas sobre las ventanillas laterales de un automóvil, cuya velocidad es de 60 km/h, inclinados $\alpha = 45°$ respecto a la vertical. Calcular:
a) Componente horizontal de la velocidad de una gota respecto al suelo y respecto al automóvil . b) Velocidad de las gotas respecto al suelo y respecto al automóvil.

****

a) Consideremos como sistema fijo de referencia el suelo, y como sistema movil al automóvil. Sabemos que:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{V}_a$$



Como las gotas caen verticalmente al suelo la velocidad V_A con respecto al mismo no tiene componente horizontal, luego $\vec{V}_{A_x} = 0$

y por tanto: $\vec{V}_{r_x} = -\vec{V}_a$

la componente horizontal de la velocidad respecto al automovil es V_{r_x} = 60 km/h en sentido contrario a la marcha del automovil.

b) Como sabemos la velocidad de arrastre V_a = 60 km/h, tendremos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_a}{V_A} \Rightarrow V_A = \frac{V_a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{60}{\operatorname{tg} 45º} = 60 \text{ km/h}$$

y la velocidad relativa:

$$V_r = \frac{V_a}{\cos\alpha} = \frac{60}{\sqrt{2}/2} = \frac{120}{\sqrt{2}} = 85{,}1 \text{ km/h}$$

y formando 45º con la vertical.

=.=.=.=.=.=.=.=.=

II-1ª. La puerta de la figura gira alrededor del eje OZ con una velocidad angular constante ω = 30 r.p.m. Sobre la puerta se mueve una mosca, describiendo un circulo de radio r = 10 cm., con una velocidad constante v = 5 π cm/sg. Calcular la aceleración de la mosca en la posición indicada en la figura

****

El vector velocidad relativa de la mosca en su movimiento circular sobre la puerta, será:

$$\vec{v}_r = -\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{5\pi\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

Como v_r es constante la única aceleración relativa está dirigida hacia el centro de la circunferencia y su valor es:

$$a_r = \frac{v_r^2}{r} = \frac{25\pi^2}{10} = \frac{5}{2}\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

el vector aceleración relativa será:

$$\vec{a}_r = -\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi^2\vec{j} - \frac{5\sqrt{2}}{4}\pi^2\vec{k}$$

La aceleración de arrastre, es la aceleración centrípeta debida a la rotación de la puerta y su módulo es:

$$a_a = \omega^2 R = \pi^2(15+5\sqrt{2}) = 22\,\pi^2 \text{cm/s}^2$$

El vectoı aceleración de arrastre será·

$$\vec{a}_a = -22\,\pi^2\,\vec{j}$$

La aceleración complementaria o de Coriolis de la mosca valdrá:

$$\vec{a}_c = 2\,(\vec{\omega}\times\vec{v}_r) = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\pi \\ 0 & -\frac{2}{2} & \frac{5\pi\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \quad 5\pi^2\sqrt{2}\,\vec{i}$$

El vector aceleración ab..olut. será·

$$\vec{a} = \vec{a}_r \quad a_a + \vec{a}_c = +5\pi^2\sqrt{2}\,\vec{i} - \pi^2\left(\frac{5\sqrt{2}}{4} + 22\right)\vec{j} - \frac{5\sqrt{2}}{4}\,\pi^2\,\vec{k}$$

y s· módulo.

$$\vec{a} = \pi^2\sqrt{50 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{4} + 22\right)^2 + \frac{9}{8}} = \cancel{\text{[illegible]}}\ \text{cm/s}^2$$

245'9 cm/s²

=.=.=.=.= .-.= =.=

II-20 Un autobús que parte del reposo puede adquirir una velocidad constante V_1 de 40 Km h. en 8 seg. Un pasajero sube al autobús por su parte posterior y avanza hacia la parte delantera del mismo con una velocidad V_2 constante de 2 Km/h. respecto al autobús. Otro pasajero que desea avanzar desde la parte delantera hacia la posterior con V_3 constante de 3 Km/h., también respecto al autobus. Hallar durante la arrancada y cuando el autobús marcha a la velocidad constante de 40 Km/h·

a) Velocidad y aceleración del pasajero que sube respecto a un observador parado en la acera
b) Velocidad y aceleracıon del pasajero que quiere bajarse respecto al mismo observador
c) Velocidad y acelera ıon del pasajero que sube respecto al que quiere baja,

****

La velocidad del autobus en m/seg. es $V_1 = \frac{40000}{3600} = 11{,}1$ m/s

y la aceleración durante el arranque $a = \frac{V_1}{t} = 1{,}4\ \text{m s}^{-2}$

además: $V_2 = 2\,\text{Km/h} = 0{,}55\ \text{m s}^{-1}$ y $V_3 = 3\,\text{Km/h} = 0{,}83\ \text{m.s}^{-1}$

1º) ..á velocidad y aceleración del pasajer que sube-respecto al obse-vador parado-durante la arrancada, son:

$$\begin{cases} V = (11{,}1 + 1{,}4\,t)\ \text{m.s}^{-1} \\ a = a_r + a_a = 1{,}4\ \text{m.s}^{-2} \end{cases}$$

y cuando el autobus marcha a velocidad constante de 40 Km/h.

$$\begin{cases} V = 40 + 2 = 42 \text{ Km/h} = 11,65 \text{ m/s.} \\ a = 0 \end{cases}$$

2º) La velocidad y aceleración del pasajero que baja-respecto al observador parado-durante la arrancada, son:

$$\begin{cases} V = (1,4t - 0,83) \text{ m/s} \\ a = 1,4 \text{ m/s} \end{cases}$$

y cuando el autobus va a 40 Km/h.

$$\begin{cases} V = 40 - 3 = 37 \text{ Km/h} = 10,27 \text{ m/s} \\ a = 0 \end{cases}$$

3º) La velocidad del uno respecto al otro es

$$V = 2 - (-3) = 5 \text{ Km/h.}$$

y la aceleración $a = 0$

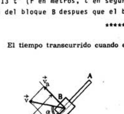
=.=.=.=.=.=.=.=

II-21. El brazo OA de 1 m. de longitud gira alrededor de O y su movimiento está definido por $\theta = 0,15\ t^2$ (θ en radianes, t en segundos). A lo largo del brazo desliza el bloque B, de tal forma que la distancia de O a B es $r = 1 - 0,13\ t^2$ (r en metros, t en segundos). Calcular la velocidad y aceleración del bloque B despues que el brazo ha girado un ángulo $\theta = 30°$.

****

El tiempo transcurrido cuando el brazo haya girado un ángulo de

$$\theta = 30º = \frac{\pi}{3}\text{, será:}$$



$$t = \sqrt{\frac{\pi}{0,90}} = 1,86 \text{ seg.}$$

La velocidad de arrastre en ese instante será:

$$v_a = \omega\, r = \dot\theta\, r = 0,30t(1 - 0,13t^2) = 0,3\ \frac{m}{s}$$

La velocidad relativa del bloque respecto a la barra:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot r = -0,26t = -0,48 \text{ m/s.}$$

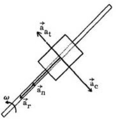
La velocidad absoluta o total del bloque B, tendrá por módulo:

$$V = \sqrt{v_a^2 + v_r^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,48^2} = 0,57 \text{ m/s}$$

y formará un ángulo α , con la barra, tal que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_a}{v_r} = \frac{0,3}{0,48} = 0,62$$

La aceleración de arrastre tiene una componente radial y otra tangencial:



$$a_{a_n} = -\omega^2 r = (0,30t)^2(1-0,13t^2) = -0,18 \frac{m}{s^2}$$

$$a_{a_t} = \alpha r = \frac{d^2\theta}{dt^2} r = \ddot{\theta} r = 0,30(1-0,13t^2) = 0,16 \ m/s^2$$

La aceleración relativa será:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} = -0,26 \ m/s^2$$

y la aceleración complementaria o aceleración de Coriolis será:

$$a_c = 2\,\omega v_r = 2\,\dot{\theta}\,\dot{r} = -2\cdot 0,30t\cdot 0,26t = -0,54 \ m/s^2$$

La componente de la aceleración en la dirección de la barra es:

$$a_n = -(0,26+0,18) = -0,44 \ m/s^2$$

La componente de la aceleración normal a la barra es:

$$a_t = 0,16-0,54 = -0,38 \ m/s^2$$

La aceleración total valdrá:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{0,44^2 + 0,38^2} = 0,58 \ m/seg^2$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

C A P I T U L O III

E S T A T I C A

III-1. Dos pesos puntuales P_1 y P_2, unidos por un hilo inextensible y flexible, se encuentran sobre una circunferencia vertical. Calcular la relación de los ángulos α_1 y α_2 y el valor de cada uno de ellos.

Se conoce la longitud del hilo, l, y el radio R de la circunferencia y además se sabe que no existen rozamientos.

****

En la posición de equilibrio las tensiones son iguales por tanto

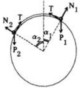
$$P_2 \operatorname{sen}\alpha_2 = P_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \qquad \text{(a)}$$

de donde $$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{P_2}{P_1}}$$

Si ahora, tenemos en cuenta que

$$l = R(\alpha_1 + \alpha_2)$$

podemos escribir (a) de la siguiente manera



$$P_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = P_2 \operatorname{sen}\left(\frac{l}{R} - \alpha_1\right)$$

operando queda

$$P_1 \operatorname{sen}\alpha_1 = P_2\left[\operatorname{sen}\frac{l}{R}\cos\alpha_1 - \cos\frac{l}{R}\operatorname{sen}\alpha_1\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha_1\left[P_1 + P_2\cos\frac{l}{R}\right] = P_2 \operatorname{sen}\frac{l}{R}\cos\alpha_1$$

y $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{P_2 \operatorname{sen}\frac{l}{R}}{P_1 + P_2\cos\frac{l}{R}}}$$

analogamente $$\boxed{\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{P_1 \operatorname{sen}\frac{l}{R}}{P_2 + P_1\cos\frac{l}{R}}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.

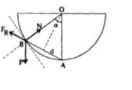
III-2. Un punto material de peso P resbala, sin rozamientos sobre la via semicircular de la fig. El punto A repele al peso dado con una fuerza $F = \frac{K}{\overline{AB}^2}$ que lleva la dirección $\overline{AB}$. Hallar:

1°) La posición de equilibrio
2°) La reacción de la via sobre P, en esa posición de equilibrio

****

1º) En la posición de equilibrio se verifica:

$$\vec{F}_R + \vec{P} + \vec{N} = 0$$



Proyectando según la dirección OB y según la tangente en B, quedará:

$$N - P\cos\alpha - F_R \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$P\operatorname{sen}\alpha - F_R\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Llamando d a la distancia AB, la segunda ecuación nos quedará:

$$P\operatorname{sen}\alpha = \frac{k}{d^2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ y que $d = 2R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$

obtenemos $$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{k}{PR^2}}$$

2º) De la primera ecuación del sistema se deduce:

$$N = P\cos\alpha + F_R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = P\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) + F_R\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

de la segunda ecuación del sistema:

$$F_R\cos\frac{\alpha}{2} = P\operatorname{sen}\alpha = 2P\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad F_R = 2P\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

por tanto $$N = P\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) + 2P\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

o sea $$\boxed{N = P}$$

=.=.=.=.=.=.=

III-3. En el sistema de la figura el bloque pesa 500 Kg. y el coeficiente de rozamiento sobre el suelo es $\mu = 0{,}4$. El radio de la polea se considera despreciable. Se pide:

1°) Cuanto debe pesar como mínimo el contrapeso P para conseguir arrastrar al bloque en la posición representada.
2°) Si el contrapeso pesa 300 Kg, cual ha de ser el valor mínimo de la distancia x, entre el bloque y el contrapeso para que este consiga mover a aquel.

****

1º) Para empezar a arrastrar el bloque se debe verificar que :

$T\cos\alpha = R$

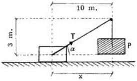
siendo R la fuerza de rozamiento del bloque con el suelo, pero

$T = P$

y :

$R = \mu N = \mu\,(P_1 - T\operatorname{sen}\alpha) =$

$= \mu\,(P_1 - P\operatorname{sen}\alpha)$



de donde :

$P\cos\alpha = \mu(P_1 - P\operatorname{sen}\alpha)$

luego :

$$P = \frac{\mu P_1}{\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha} = \frac{0,4.500}{\frac{10}{\sqrt{109}} + 0,4\frac{3}{\sqrt{109}}} = 185,6 \text{ Kg.}$$

2º) Teniendo en cuenta que ahora P = 300 Kg. y expresando seno y coseno de α en función de x, nos quedará :

$$300 = \frac{0,4.500}{\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + 0,4\frac{3}{\sqrt{9+x^2}}}$$

operando $\quad 3\,(x + 1,2) = 2\sqrt{x^2+9}$

elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad anterior y simplificando, obtenemos :

$$5x^2 + 21,6x - 23,04 = 0$$

de donde $\quad x = 0,88$ m.

=.=.=.=.=.=.=

III-4. Una varilla homogénea de 20 Kg. de peso se apoya tal como indica la figura. Determínese:

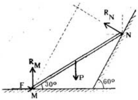
a) Fuerza horizontal, F, que se debe aplicar al extremo M de la varilla para que se mantenga en equilibrio con un ángulo de inclinación con la horizontal de 30°.
Se supone que el ángulo de la pared en que se apoya el otro extremo de la varilla, N, con la horizontal es de 60° y además que no existen rozamientos.

b) Reacciones de los apoyos sobre la varilla.

****

Supondremos que la longitud de la varilla sea l. Para obtener las ecuaciones de equilibrio de la varilla, proyectamos según la horizontal y la vertical y tomando momentos respecto al punto M, quedará:

$$\left.\begin{aligned} &F - R_N \operatorname{sen} 60º = 0 \\ &R_M + R_N \cos 60º - P = 0 \\ &P\tfrac{1}{2}\cos 30º - R_N \cdot 1 \cos(60º - 30º) = 0 \end{aligned}\right\}$$



De la última ecuación obtendremos R_N

$R_N = \frac{P}{2} = \underline{\underline{10 \text{ Kgs.}}}$

luego $F = R_N \operatorname{sen} 60 = \frac{10\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{8'66 \text{ Kgs.}}}$

y $R_M = P - R_N \cos 60 = 20 - 5 = \underline{\underline{15 \text{ Kg.}}}$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

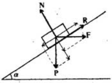
III-5. Un bloque de peso P está apoyado sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal; el coeficiente de rozamiento del bloque con el plano es μ. Calcular:

1º) Que fuerza mínima horizontal hay que aplicar al bloque para quese mantenga en reposo

2º) Fuerza mínima que tendremos que aplicar horizontalmente para empezar a subir el bloque.

****

1º) En el primer caso el rozamiento se opone al descenso, por tanto :



$$F\cos\alpha + \mu N = P\operatorname{sen}\alpha$$

y

$$N = P\cos\alpha + F\operatorname{sen}\alpha$$

sustituyendo el valor de N en la primera ecuación, tendremos :

$$F\cos\alpha + \mu(P\cos\alpha + F\operatorname{sen}\alpha) = P\operatorname{sen}\alpha$$

resultará :

$$\boxed{F = P\,\frac{\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha}}$$

2º) En este caso el rozamiento se opone también al movimiento de subida, luego :

$$F\cos\alpha = \mu N + P\operatorname{sen}\alpha$$

o sea

$$F\cos\alpha = \mu(P\cos\alpha + F\operatorname{sen}\alpha) + P\operatorname{sen}\alpha$$

de donde :

$$\boxed{F = P\,\frac{\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\operatorname{sen}\alpha}}$$

=.=.=.=.=.=.=

III-6. Un agitador de longitud 2l m. se apoya sobre el fondo y el borde de una cápsula de porcelana. Suponiendo despreciables los rozamientos, el agitador se moverá hasta alcanzar una posición de equilibrio. Determinar esta posición dada por el ángulo φ.
El agitador es una barra uniforme de peso P y la cápsula es semiesferica de radio R.

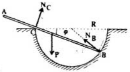
****

Tomemos momentos respecto a B. quedará :

$$P l \cos\varphi - N_C 2R\cos\varphi = 0$$

de donde

$$N_C = \frac{P l}{2R}$$



Proyectemos todas las fuerzas que actúan sobre la barra sobre los ejes horizontal y vertical.

$$\sum F_x = N_C \operatorname{sen}\varphi - N_B\cos 2\varphi = 0$$

$$\sum F_y = N_C\cos\varphi - N_B \operatorname{sen} 2\varphi - P = 0$$

resolvamos el sistema :

$$N_B = N_C \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos 2\varphi}$$

de donde

$$N_C\cos\varphi + N_C\frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\varphi}{\cos 2\varphi} = P$$

o sea
$$\cos\varphi + \frac{2\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi}{2\cos^2\varphi - 1} = \frac{2R}{l}$$

simplificando
$$\frac{\cos\varphi}{2\cos^2\varphi - 1} = \frac{2R}{l}$$

por tanto
$$\boxed{\cos\varphi = \frac{1}{8R}\left[l + \sqrt{l^2 + 32R^2}\right]}$$

=.=.=.=.=.=.=

III-7. Tres hombres estan encargados de transportar dos vigas AB y BC de longitudes respectivos AB = 2l = 6 m. y BC = 2l' = 4 m. Las dos vigas estan hechas del mismo material y tienen la misma sección, estan soldados en B formando ángulo recto. Durante el transporte las vigas se mantienen horizontales y uno de los hombres se ha colocado en B. Determinar a que distancias de B han de colocarse los otros dos hombres para que los tres soporten la misma carga.

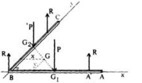
****

Como las tres reacciones han de ser iguales, se verifica :

$$3R = P + P'$$

de donde

$$R = \frac{P + P'}{3}$$



Tomando momentos respecto a los ejes x e y, tendremos

$$\frac{P + P'}{3}\, a - Pl = 0$$

$$\frac{P + P'}{3}\, b - P'l' = 0$$

luego

$$a = 3\,\frac{Pl}{P + P'} = 3\,\frac{2\,l\,s\,\rho\,l}{2\,s\,\rho\,(l + l')} = 3\,\frac{l^2}{l + l'}$$

$$b = 3\,\frac{P'l'}{P + P'} = 3\,\frac{2\,l'\,s\,\rho\,l'}{2\,s\,\rho\,(l + l')} = 3\,\frac{l'^2}{l + l'}$$

sustituyendo valores

$$a = \frac{27}{5} = 5{,}4\ \text{m}$$

$$b = \frac{12}{5} = 2{,}4\ \text{m}$$

=.=.=.=.=.=.=

III-8. Una escalera de peso P_1 y longitud $2l$ se apoya por su extremo inferior A sobre el suelo y por el otro extremo B en una pared vertical. Un hombre de peso P_2 sube la escalera hasta una altura tal que AH = a. Los coeficientes de rozamiento de la escalera con el suelo y la pared son respectivamente μ_1 y μ_2. Hallar:

1º) El valor máximo del ángulo que forma la escalera con la pared sin que resbale

2º) Hallar dicho ángulo en el caso de que el hombre haya subido hasta el extremo B.

****

Aplicando las condiciones de equilibrio, obtenemos las siguientes ecuaciones :

$$N_2 - \mu_1 N_1 = 0$$

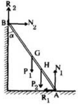
$$N_1 + \mu_2 N_2 - P_1 - P_2 = 0$$

$$P_2 a \operatorname{sen}\alpha + P_1 l \operatorname{sen}\alpha - N_2\, 2l \cos\alpha - \mu_2 N_2\, 2l \operatorname{sen}\alpha = 0$$

hemos tomado momentos respecto al punto A.

De las dos primeras ecuaciones obtendremos :

$$N_2 = \frac{\mu_1 (P_1 + P_2)}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2}$$



y de la tercera

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\,l\,N_2}{P_2 a + P_1 l - \mu_2 N_2\, 2l}$$

sustituyendo el valor de N_2 en esta ultima expresión .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\,l\, \mu_1 (P_1 + P_2)}{(P_2 a + P_1 l)(1 + \mu_1 \mu_2) - 2l\, \mu_1 \mu_2 (P_1 + P_2)}$$

2º) En este caso $a = 2\,l$

por tanto $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \mu_1 (P_1 + P_2)}{(2P_2 + P_1)(1 + \mu_1 \mu_2) - 2 \mu_1 \mu_2 (P_1 + P_2)}$$

=.=.=.=.=.=.=

III-9. Una barra homgénea, de longitud, l, y peso, P, se apoya sin rozamiento en B contra una pared vertical y por su extremos A, sobre un suelo horizontal con un coeficiente de rozamiento μ_1.

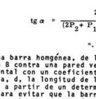
Sea, d, la longitud de la proyección horizontal de la barra sobre el suelo, a partir de un determinado valor de d, es necesario colocar un peso P', para evitar que la barra deslice

1º) Encontrar a partir de que valor d_1 es necesario colocar el peso P'

2º) Para un valor $d_2 > d_1$ que peso mínimo P' debemos colocar. Coeficiente de rozamiento de P' con el suelo μ_2.

****

1º) Llamando α al ángulo que forma la barra con la pared proyectamos todas las fuerzas sobre las direcciones horizontal y vertical



$$N_B - \mu_1 N_A = 0$$

$$N_A - P = 0$$

de donde

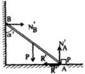
$$N_A = P \quad \text{y} \quad N_B = \mu_1 P$$

Tomando momentos respecto al punto A $\quad P \frac{l}{2} \operatorname{sen} \alpha - N_B l \cos \alpha = 0$

por tanto $\operatorname{tg} \alpha = 2 \mu_1$

o sea $$2\mu_1 = \frac{d_1}{\sqrt{l^2 - d_1^2}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{d_1 = \frac{2\mu_1 l}{\sqrt{1+4\mu_1^2}}}$$

2º) Procederemos como en la primera pregunta pero teniendo en cuenta la fuerza de rozamiento del peso P' con el suelo.



$$N'_B - \mu_1 N'_A - \mu_2 P' = 0$$

$$N_A - P = 0$$

$$P\frac{l}{2}\,\text{sen}\,\alpha' - N'_B l \cos\alpha' = 0$$

resolviendo el sistema

$$\boxed{P' = \frac{P}{\mu_2}\left[\frac{d_2}{2\sqrt{l^2 - d_2^2}} - \mu_1\right]}$$

=.=.=.=.=.=

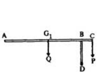
III-10. Dos barras homogéneas, de longitud AC = 16 m. y BD = 4 m., de ejes perpendiculares, están rigidamente unidas en B, siendo BC = 2 m. Las barras estan en un mismo plano vertical y el sistema puede girar sin rozamiento alrededor de un eje proyectado en D. El peso de los dos barras es el mismo 10 Kg. Hallar:

1º) El peso, P, que hay que aplicar en C para que la barra BD permanezca vertical.

2º) Una vez retirado el peso P, hallar el ángulo que forma la barra BD con la vertical en la nueva posición de equilibrio.

****

1º) Tomando momentos respecto a D, tendremos :



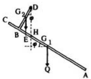
$$10\,\overline{G_1B} = P\cdot\overline{BC}$$

pero $\overline{G_1B} = \overline{G_1C} - \overline{BC} = 8 - 2 = 6$ m.

de donde $\boxed{P = \frac{10\cdot 6}{2} = 30 \text{ Kg}}$

2º) Tomando momentos respecto a D tendremos :

$$P\cdot\overline{DG_2}\,\text{sen}\,\varphi = P\cdot\overline{HG_1}\cos\varphi$$



de donde

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\overline{HG}_1}{\overline{DG}_2'} = \frac{\overline{BG}_1 - \overline{BH}}{\overline{DG}_2} = \frac{\overline{BG}_1 - \overline{DB}\operatorname{tg}'}{\overline{DG}_2}$$

sustituyendo valores

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{6 - 4\operatorname{tg}\varphi}{2}$$

de donde $\operatorname{tg}\varphi = 1$

o sea $\boxed{\varphi = 45^{\circ}}$

=.=.=.=.=.=

III-11. Una caja paralelepipédica a la que le falta la base inferior, contiene dos cilindros iguales de radio r = 6 cm. y peso P = 0,5 Kg. que se apoyan mutamente entre si y contra las paredes de la caja. La anchura de la caja es 2a cm. y la longitud de la caja y de los cilindros es la misma. Hallar el peso mínimo Q de la caja para que no sea volcada por el peso de los cilindros.

****

Proyectando según la horizontal las fuerzas que actúan sobre la caja, obtenemos

$$N_1 = N_2$$

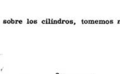
Considerando el sistema de fuerzas que actúa sobre los cilindros, tomemos momentos respecto al punto O_2.

$$P\,2(a-r) - N_1(h-r) = 0$$

por tanto:

$N_1 = 2P \frac{a-r}{h-r}$

$$N_1 = N_2 = 2P\,\frac{a-r}{h-r}$$



Tomando momentos respecto a B, para que no vuelque la caja se ha de verificar :

$$Q \cdot a + N_2 r \geq N_1 h$$

$$Q \cdot a \geq N_1 (h-r)$$

de donde :

$$Q \geq N_1 \frac{h-r}{a}$$

sustituyendo N_1 por su valor:

$$Q \geq \frac{2P}{a}(a-r) = 2P\left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

$$Q \geq 2 \cdot 0,5 \left(1 - \frac{6}{10}\right) = 0,4 \text{ Kg.}$$

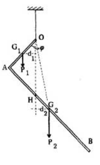
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

III-12. Dos barras de la misma sustancia y sección, de longitudes $\underline{a}$ y $\underline{b}$ respectivamente, están unidas rigidamente formando ángulo recto. Todo este sistema pende de un hilo unido al extremo de la barra corta y el otro extremo del hilo está fijo. Hallar el ángulo que la barra corta forma con la vertical. $a < b$

****

Tomando momentos con respecto a O, tenemos :

$$P_1 d_1 = P_2 d_2$$



por otra parte

$$P_1 = s\,a\,\rho\,g$$
$$P_2 = s\,b\,\rho\,g$$

sustituyendo y simplificando, queda :

$$a\,d_1 = b\,d_2$$

siendo

$$d_1 = \frac{a}{2}\operatorname{sen}\varphi$$

y $\quad d_2 = \overline{HG}_2\cos\varphi = \left(\frac{b}{2} - a\operatorname{tg}\varphi\right)\cos\varphi$

por tanto

$$\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}\varphi = b\left(\frac{b}{2} - a\operatorname{tg}\varphi\right)\cos\varphi$$

o bien $\quad \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{2} - a\,b\operatorname{tg}\varphi$

y de aquí $\quad \boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{b^2}{a\,(a + 2b)}}$

-.=.=.=.=.=.=.=

III-13. Dos cilindros macizos y homogéneos de pesos P_1 y P_2 se apoyan sin rozamiento sobre los planos inclinados de la figura. Calcular el ángulo que forma con la horizontal, la recta O_1O_2 que une los centros de los cilindros en la posición de equilibrio:

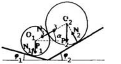
Datos: $\quad P_1 = 6$ Kg. $\quad P_2 = 10$ Kg. $\quad \varphi_1 = 15°\quad \varphi_2 = 30°$

****

Considerando el sistema constituído por los dos cilindros, las ecuaciones de equilibrio serán :

$$N_1\operatorname{sen}\varphi_1 - N_2\operatorname{sen}\varphi_2 = 0$$

$$N_1\cos\varphi_1 + N_2\cos\varphi_2 - P_1 - P_2 = 0$$



Resolvamos el sistema para obtener N_1 de la primera ecuación despejamos

$$N_2 = N_1 \frac{\operatorname{sen} \varphi_1}{\operatorname{sen} \varphi_2}$$

valor que sustituímos en la segunda, nos quedará

$$N_1 \cos \varphi_1 + N_1 \frac{\operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2}{\operatorname{sen} \varphi_2} = P_1 + P_2$$

de donde

$$N_1 = \frac{P_1 + P_2}{\cos \varphi_1 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{cotg} \varphi_2} = \frac{(P_1 + P_2) \operatorname{sen} \varphi_2}{\cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2} = \frac{(P_1 + P_2) \operatorname{sen} \varphi_2}{\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Consideremos, ahora, el sistema constituído por el cilindro O_1 aislado.

$$N_1 \operatorname{sen} \varphi_1 - N_3 \cos \alpha = 0$$

$$N_1 \cos \varphi_1 - N_3 \operatorname{sen} \alpha - P_1 = 0$$

de donde

$$N_3 \cos \alpha = N_1 \operatorname{sen} \varphi_1$$
$$N_3 \operatorname{sen} \alpha = N_1 \cos \varphi_1 - P_1$$

y

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_1 \cos \varphi_1 - P_1}{N_1 \operatorname{sen} \varphi_1}$$

sustituyamos el valor de N_1, anteriormente obtenido, quedará

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(P_1 + P_2) \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 - P_1 \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)}{(P_1 + P_2) \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2} = \frac{P_2 \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 - P_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2}{(P_1 + P_2) \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2} =$$

$$= \frac{P_2 \operatorname{cotg} \varphi_1 - P_1 \operatorname{cotg} \varphi_2}{P_1 + P_2}$$

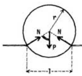
sustituyendo los valores numéricos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10 \operatorname{cotg} 15^\circ - 6 \operatorname{cotg} 30^\circ}{16} = 1,68$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

III-14. Una esfera pesada de densidad ρ se apoya sin rozamiento en los bordes de un orificio cuadrado de lado l, que se ha practicado en una superfecie horizontal. Hallar el radio que debe tener la esfera para que las reacciones, supuestas iguales entre sí, en los puntos de contacto de la esfera con los bordes del orificio sean mínimas, y calcular el valor de la reacción en cada punto.

****



El peso de la esfera ha de ser igual a la suma de los componentes verticales de las cuatro reacciones

$$P = 4N\cos\alpha$$

de donde

$$N = \frac{P}{4\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho g}{4\,\frac{\sqrt{r^2-l^2/4}}{r}} = \frac{2}{3}\pi\rho g\,\frac{r^4}{\sqrt{4r^2-l^2}}$$

derivando esta expresión

$$N' = \frac{2}{3}\pi\rho g\,\frac{4r^3\sqrt{4r^2-l^2} - \frac{4r^5}{4r^2-l^2}}{4r^2-l^2} = \frac{2}{3}\pi\rho g\,\frac{4r^3(4r^2-l^2) - 4r^5}{(4r^2-l^2)^{3/2}}$$

para que N sea mínimo se debe verificar

$$4r^3\left[4r^2 - l^2 - r^2\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} r = 0 & \text{solución trivial} \\ 3r^2 - l^2 = 0 \;\Rightarrow\; r = \dfrac{l\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

y el valor de cada una de las cuatro reacciones

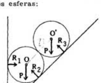
$$N = \frac{2}{3}\pi\rho g\,\frac{l^4/9}{\sqrt{\frac{4l^2}{3} - l^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi\rho g\, l^3$$

=.=.=.=.=.=.=.=

III-15. Dos esferas iguales, del mismo peso P, encuentran entre dos planos. Determínese las reacciones de los planos sobre cada una de las esferas suponiendo que el rozamiento entre todas las superficies es nulo.

****

Apliquemos las condiciones de equilibrio al sistema constituido por las dos esferas:



$$\sum F_x = 0 \qquad R_1 - (R_2 + R_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad (R_2 + R_3)\frac{\sqrt{2}}{2} - 2P = 0$$

$$\sum M_o = 0 \qquad R_3\cdot 2r - P\cdot 2r\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

de la tercera ecuación obtenemos:

$$\underline{R_3 = P\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

de la segunda:

$$R_2 = \frac{4P}{\sqrt{2}} - R_3 = \frac{4\sqrt{2}}{2}P - \frac{\sqrt{2}}{2}P = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}P}$$

y de la primera: $R_1 = (R_2 + R_3)\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{2P}$

=.=.=.=.=.=.=.=

C A P I T U L O IV

D I N A M I C A

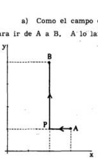
IV-1. Una masa de 5Kg. está sometida a una fuerza conservativa cuya expresión es $F = -2x\vec{i} - 2y\vec{j}$ en Newton.

a) ¿Cuál es el trabajo necesario para trasladarla del punto A(3m,1m) al punto B(2m.,4m.).

b) Sabiendo que llega a B con velocidad nula ¿cuál es su velocidad en A?

****

a) Como el campo es conservativo el trabajo es independiente del camino para ir de A a B. A lo largo del camino APB, obtendremos:



$$W_A^B = W_A^P + W_P^B = -2\int_3^2 x\,dx - 2\int_1^4 y\,dy = \left[x^2\right]_2^3 - \left[y^2\right]_1^4 =$$

$$= \left[9-4\right] - \left[16-1\right] = -10 \text{ julios}$$

b) Sabemos que $W_A^B = E_{P_A} - E_{P_B}$

y aplicando el principio de conservación de la energía

$$E_{K_B} - E_{K_A} = E_{P_A} - E_{P_B} = -10 \text{ julios}$$

como $v_B = 0$, quedará

$$-\frac{1}{2} m v_A^2 = -10 \Rightarrow v_A^2 = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow v_A = 2\,\text{m/s}.$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-2. Calcular el centro de masas y la velocidad del mismo, en el sistema de masas:

$$m_1 = 2 \text{ Kg.} \qquad r_1 = (3t,\ 0,\ 4)$$
$$m_2 = 6 \text{ Kg.} \qquad r_2 = (3+t,\ t^2,\ 1)$$
$$m_3 = 1 \text{ Kg.} \qquad r_3 = (0,\ t^2+t,\ t)$$

****

El vector posición del centro de masas está definido por la expresión:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

sus componentes serán:

$$R_x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{6t + 6(3+t)}{9} = \frac{12t + 18}{9}$$

$$R_y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{6t^2 + t^2 + t}{9} = \frac{7t^2 + t}{9}$$

$$R_z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{8 + 6 + t}{9} = \frac{t + 14}{9}$$

luego:

$$\vec{R} = \frac{1}{9}\left[(12t + 18)\ \vec{i} + (7t^2 + t)\ \vec{j} + (t + 14)\ \vec{k}\right]$$

y la velocidad del centro de masas será:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{9}\left[12\,\vec{i} + (14t + 1)\ \vec{j} + \vec{k}\right]$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-3. Calcular el momento cinético de un sistema de dos partículas A_1 y A_2 cuyas masas respectivas son $m_1 = 3$ gr. y $m_2 = 5$ gr., con respecto al centro de masas del sistema, en un instante en que las posiciones y velocidades respectivas están dadas por:

$$r_1 \equiv (2,0,-1) \text{ cm.} \qquad r_2 \equiv (-2,2,3) \text{ cm.}$$
$$\vec{v}_1 \equiv (1,1,1) \text{ cm/seg.} \qquad \vec{v}_2 \equiv (-1,2,0) \text{ cm/sg.}$$

Calcular tambien la energía cinética del sistema respecto al centro de masas.

****

Calculemos el vector de posición y la velocidad del centro de masas

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{6\vec{i} - 3\vec{k} - 10\vec{i} + 10\vec{j} + 15\vec{k}}{8} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} - 5\vec{i} + 10\vec{j}}{8} = -\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{13}{8}\vec{j} + \frac{3}{8}\vec{k}$$

Los vectores de posición y las velocidades de m_1 y m_2 con respecto al centro de masas del sistema, serán:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = 2\vec{i} - \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} - \frac{3}{2}\vec{k} = \frac{5}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} - \frac{5}{2}\vec{k}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j} - \frac{3}{2}\vec{k} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{13}{8}\vec{j} - \frac{3}{8}\vec{k} = \frac{5}{4}\vec{i} - \frac{5}{8}\vec{j} + \frac{5}{8}\vec{k}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{13}{8}\vec{j} - \frac{3}{8}\vec{k} = -\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{3}{8}\vec{j} - \frac{3}{8}\vec{k}$$

El momento cinético de la partícula m_1 respecto al centro de masas es:

$$L_1' = \vec{r}_1' \times m_1\vec{v}_1' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{4} & -\frac{15}{8} & \frac{15}{8} \end{vmatrix} = -\frac{225}{32}\vec{i} - \frac{225}{16}\vec{j}$$

el momento cinético de m_2 respecto al C.M. es

$$L_2' = \vec{r}_2' \times m_2\vec{v}_2' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3/2 & 3/4 & 3/2 \\ -15/4 & 15/8 & -15/8 \end{vmatrix} = -\frac{135}{32}\vec{i} - \frac{135}{16}\vec{j}$$

el momento cinético del sistema respecto al C.M. es

$$L_{CM} = L_1' + L_2' = -\frac{225}{32}\vec{i} - \frac{225}{16}\vec{j} - \frac{135}{32}\vec{i} - \frac{135}{16}\vec{j} = -\frac{360}{32}\vec{i} - \frac{360}{16}\vec{j} = -\frac{45}{4}\vec{i} - \frac{45}{2}\vec{j}$$

La energía cinética respecto al centro de masas, será

$$E_{K_{CM}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot \frac{150}{64} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{54}{64} = \frac{45}{8} = 5'625 \quad \text{ergios}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-4. Una partícula se encuentra sometida a una fuerza $F = (3x^2+6y)\vec{i} - 14\, yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$.

Calcular el trabajo realizado por dicha fuerza cuando la partícula se traslada del punto (0,0,0) al punto A(1,1,1) a lo largo de los caminos siguientes:

a) A lo largo de la curva $x = t$; $y = t^2$; $z = t^3$
b) A lo largo de la bisectriz $x = y = z$
c) A lo largo de eje OX hasta el punto (1,0,0), desde (1,0,0) paralelamente al eje OY, hasta el punto (1,1,0), y desde allí, paralelamente al eje OZ hasta el punto A(1,1,1)

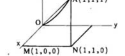
¿El campo de fuerzas es conservativo?

****

a) El trabajo de una fuerza variable a lo largo de una trayectoria AB es:

$$T = \int_0^A \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^A (F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \int_0^A \left[(3x^2+6y)\,dx - 14yzdy + 20xz^2dz\right]$$



Como:

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= t^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= 2t\,dt \\ dz &= 3t^2dt \end{aligned}$$

sustituyendo valores nos quedará:

$$T_1 = \int_0^1 \left[(3t^2+6t^2)\,dt - 28t^6dt + 60t^9dt\right] = \left[3t^2 - 4t^7 + 6t^{10}\right]_0^1 = 3-4+6 = 5$$

b) El trabajo a lo largo de la bisectriz, como $x = y = z$, será:

$$T_2 = \int_0^1 \left[(3x^2+6x)\,dx - 14x^2dx + 20x^3dx\right] = \int_0^1 (6x - 11x^2 + 20x^3)\,dx =$$

$$= \left[3x^2 - \frac{11}{3}x^3 + 5x^4\right]_0^1 = 3 - \frac{11}{3} + 5 = \frac{13}{3}$$

c) El trabajo a lo largo del camino OMNA, será:

$$T_3 = T_O^M + T_O^N + T_N^A$$

o sea:

$$T_3 = \int_0^1 3x^2dx + \int_0^1 20z^2dz = \left[x^3\right]_0^1 + \frac{20}{3}\left[z^3\right]_0^1 = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

El trabajo es distinto para cada uno de los caminos y, en consecuencia, el campo de fuerzas <u>no</u> es conservativo.

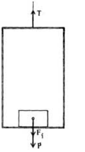
=.=.=.=.=.=.=.=

IV-5. Un montacargas posee una velocidad de régimen, tanto al ascenso como en el descenso, de 4 m/s, tardando 1 seg. en adquirirla al arrancar, o en detenerse del todo en las paradas. Se carga un fardo de 600 Kg. y se sabe, además, que la caja del montacargas, con todos sus accesorios, tiene una masa de 1200 Kg. Calcúlese:

a) Fuerza que ejercerá el fardo sobre el suelo del montacargas durante el arranque para ascender.
b) Fuerza que ejercerá durante el ascenso a la velocidad de régimen.
c) " " " en el momento de detenerse
d) Tensión de los cables del montacargas en el caso a).
e) " en el instante en que el montacargas inicia su descenso vacío.

****

a) La aceleración del montacargas durante el arranque es: $a = 4\ m/s^2$



La fuerza ejercida por el fardo sobre el suelo durante este período es la suma del peso del fardo y la fuerza de inercia sobre el mismo.

$$F_a = P + ma = m(g+a) = 8280\ Nw$$

b) A la velocidad de regimen la aceleración es cero, luego:

$$F_b = P = mg = 5880\ Nw.$$

c) Durante la parada el movimiento del montacargas es decelerado, $a = -4\ m/s^2$, luego:

$$F_c = P - ma = m\ (g - a) = 3480\ Nw$$

d) En este caso la masa total es la suma de la del montacargas y de la del fardo, por tanto:

$$T_d = P_T + m_T a = 1800(g+a) = 24840\ Nw$$

e) Ahora la masa es de 1200 kg. y la fuerza de inercia de sentido contrario al peso, luego:

$$T_e = P_M - m_M a = 1200\ (g - a) = 6960\ Nw$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-6. El cuerpo A de la fig. de 1 Kg. de masa, está unido por una cuerda inextensible y sin peso con el cuerpo B, de 2Kg. Si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo A y el plano inclinado vale 0,2 y entre el cuerpo B y el plano 0,3, calcular: a) La aceleración de los cuerpos b) la tensión de la cuerda. $g = 10\ m/s^2$

****

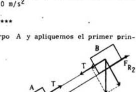
a) Consideremos unicamente el cuerpo A y apliquemos el primer principio fundamental de la dinámica, tendremos:

$$m_A g \operatorname{sen}\alpha - \mu m_A g \cos\alpha - T = m_A a$$

aislando el cuerpo B, tendremos:

$$m_B g \operatorname{sen}\alpha - \mu' m_B g \cos\alpha + T = m_B a$$

de estas dos ecuaciones obtendremos:



$$a = g\,\frac{m_A \operatorname{sen}\alpha + m_B \operatorname{sen}\alpha - (\mu m_A \cos\alpha + \mu' m_B \cos\alpha)}{m_A + m_B}$$

o sea

$$a = 10\,\frac{\frac{1}{2} + 1 - \left(0,2\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,6\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3} = 10\,\frac{\frac{3}{2} - \frac{0,8\sqrt{3}}{2}}{3} = \underline{\underline{2,69\ \mathrm{m\ s^{-2}}}}$$

b) Despejando T de la primera ecuación, obtendremos:

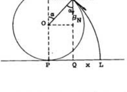
$$T = m_A(g\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha - a) = 10\,\frac{1}{2} - 0,2\ 10\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2,69 = \underline{\underline{0,58\ \mathrm{Nw.}}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-7. Un punto material de masa M se mueve sin rozamiento solicitado por la acción de la gravedad, sobre una esfera de 3m. de radio apoyada en un plano horizontal. Suponiendo que parte el móvil sin velocidad inicial desde un punto B muy próximo el punto más alto de la esfera, se pide determinar: 1º El punto en que el móvil abandona la esfera y la velocidad en ese instante 2º la distancia al punto de apoyo de la esfera de la intersección de la trayectoria con el plano horizontal de apoyo 3º Velocidad del móvil en ese punto de la trayectoria.

****

1º) El punto abandona la esfera cuando la fuerza centrifuga sea un poco mayor que la componente del peso.



$$P\cos\alpha = m\,\omega^2 r$$

$$g\cos\alpha = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

o sea :

$$\cos\alpha = \frac{2\,g\,(R - R\cos\alpha)}{R\,g} =$$

$$= 2 - 2\cos\alpha \quad ; \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{2}{3}}$$

y

$$v = \sqrt{2gR\,(1-\cos\alpha)} = \sqrt{20} =$$

$$= \underline{2\sqrt{5}\ \mathrm{ms^{-1}}}$$

2º) El movimiento de la partícula a partir de M tiene las siguientes ecuaciones :

$$\left.\begin{aligned} x &= v\,t\cos\alpha \\ y &= v\,t\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\,g t^2 \end{aligned}\right\} \qquad y = x\,\mathrm{tg} + \frac{g}{2\,v^2\cos^2\alpha}\,x^2$$

poniendo valores en la ecuación anterior :

$$\frac{g}{2\,v^2\cos^2}\,x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - y = 0$$

$$\frac{10}{2\cdot 20\cdot\frac{4}{9}}\,x^2 + \frac{5}{2\cdot\sqrt{5}}\,x - 3\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 0 \qquad \frac{9}{16}\,x^2 + \frac{5}{2\sqrt{5}}\,x - 5 = 0$$

$PL = PQ + x = R \operatorname{sen}\alpha + x = 2,23+2,1 = 4,33$ m.

3º) La velocidad en el punto L del plano será :

$$V = \sqrt{v^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2gy^2} = \sqrt{20 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot 10 \cdot 25} = \sqrt{\frac{4600}{9}} = \frac{10\sqrt{46}}{3}$$

=.=.=.=.=.=

IV-8. Los tres cuerpos de la figura, que están unidos mediante cuerdas inextensibles y sin peso, tienen de masas respectivas $m_a = 10$ Kg, $m_b = 15$ Kg, $m_c = 20$ Kg. Se le aplica al cuerpo A una fuerza de 50 Nw. Calcular la aceleración de cada uno de los cuerpos, así como las tensiones de las cuerdas que los unen.

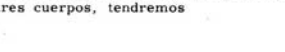
Repetir el problema cuando el sistema se mueve verticalmente en vez de hacerlo en un plano horizontal. $g = 10\ m/s^2$

****

Apliquemos la fórmula fundamental de la dinámica al sistema formado por los tres cuerpos, tendremos

$$F = (m_a + m_b + m_c) . a$$

o sea, $a = \frac{50}{45} = \frac{10}{9}\ m/sg^2$



Considerando el sistema formado por el cuerpo C, tendremos:

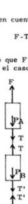
$$T' = m_c \cdot a$$

o sea, $$T' = \frac{10 \cdot 20}{9} = \frac{200}{9} = 22'2 \text{ Nw.}$$

Teniendo en cuenta solamente el sistema de fuerzas que actua sobre A, tendremos

$$F - T = m_a . a \qquad T = F - m_a . a = 50 - 10\ \frac{10}{9} = 38'8 \text{ Nw}$$

Suponiendo que F actúa verticalmente hacia arriba y procediendo de forma análoga que en el caso anterior tendremos:



$$a' = \frac{F - (P_a + P_b + P_c)}{m_a + m_b + m_c} = \frac{50 - 450}{45} = -\frac{400}{45} = -\frac{80}{9} =$$

$$= -8'8\ m/sg^2$$

Para calcular T'

$$T' - P_c = m_c a'$$

o sea, $$T' = 200 - 20\ \frac{80}{9} = 22'2 \text{ Nw}$$

analogamente,

$$T - T' - P_b = m_b \cdot a' \qquad \text{y}$$

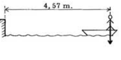
$$T = 22'2 + 150 - 15 \cdot \frac{80}{9} = 38'9 \text{ Nw}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.

IV-9. Un hombre pesa 72,5 Kg. está de pié sobre una barca de manera que se encuentra a 4,57 m. del muelle. Camina 2,44 m. en la barca en dirección al muelle y luego se detiene. ¿A qué distancia del muelle se encontrará al cabo de este tiempo?. La barca pesa 90,7 Kg y no hay rozamiento entre ella y el agua.

****

Llamemos V_h a la velocidad con que camina el hombre sobre la barca y - V_a la velocidad con que retrocede el sistema barca-hombre. Igualando cantidades de movimiento



$$m_h V_h = (m_b + m_h) V_a$$

de donde $V_a = \frac{m_h}{m_b + m_h} \cdot V_h$

la velocidad con que el hombre se acerca al muelle, será:

$$V_A = V_h - V_a = V_h - \frac{m_h}{m_b + m_h} V_h = \frac{m_b}{m_b + m_h} \cdot V_h$$

el hombre se habrá acercado al muelle una distancia

$$d = V_A t = \frac{m_b}{m_b + m_h} V_h \cdot t = \frac{90'7}{90'7 + 72'5} \cdot \frac{2'44}{t} t = 1'36 \text{ m.}$$

y se encuentra a una distancia del mismo

$$d' = 4'57 - 1'36 = 3'21 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.

IV-10. a) Dos bloques de masas m_1 y m_2, apoyados el uno contra el otro, descansan sobre un suelo perfectamente liso. Se aplica al bloque m_1 una fuerza F horizontal y se pide: 1º) Aceleración con la que se mueve el sistema 2) Fuerzas de interacción entre ambos bloques.

b) Resolver el mismo problema para el caso en que el coeficiente de rozamiento de los bloques con el suelo sea 0,2.

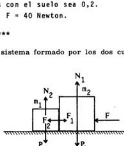
Datos: m_1 = 20 Kg. ; m_2 = 15 Kg ; F = 40 Newton.

****

a) Las fuerzas que actúan sobre el sistema formado por los dos cuerpos están representados en la figura.

Aplicando el segundo principio fundamental de la dinámica, tendremos:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{40}{35} = 1,14 \text{ m s}^{-2}$$



Aislando el bloque de masa m_2 y aplicando el mismo principio, quedará:

$$F_2 = m_2 a = 15 \cdot 1,14 = 17,1 \text{ Newton}$$

aplicando el principio de acción y reacción:

$$F_1 = F_2 = 17,1 \text{ Newton}$$

b) Las fuerzas de rozamiento sobre los bloques de masas m_1 y m_2 valdrán respectivamente

$$R_1 = \mu N_1 = 0,2 \times 20 \times 9,8 = 3,92 \text{ Newton}$$
$$R_2 = \mu N_2 = 0,2 \times 15 \times 9,8 = 2,94 \text{ Newton}$$

la aceleración del sistema, será:

$$a = \frac{F - R_1 - R_2}{m_1 + m_2} = \frac{40 - (3,92 + 2,94)}{35} = 0,94 \text{ m/s}^2$$

aislando el bloque de masa m_2, se tiene

$$F'_2 - R_2 = m_2 a \quad \Rightarrow \quad F'_2 = 2,94 + 15 \times 0,94 = 17,04 \text{ Newton}$$

y la reacción del bloque m_2 contra m_1.

$$F'_1 = F'_2 = 17,04 \text{ Newton}$$

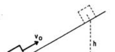
=.=.=.=.=.=.=.=

IV-11. Un bloque de 20 Kg asciende por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 12 m/sg. Se sabe que el cuerpo llega al punto de partida con una velocidad de 6m/sg. Calcular el coeficiente de rozamiento entre plano y cuerpo.

****

Cuando el bloque llegue al punto más alto del recorrido, su velocidad será nula y por consiguiente la energía cinética es igual a cero. La energía cinética en la posición inicial es igual a la energía potencial en el punto de arriba mas el trabajo necesario para vencer los rozamientos, se obtendrá:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = mgh + \mu mg\cos 30^o \frac{h}{\operatorname{sen}30} \quad \text{(a)}$$



En la bajada, la energía potencial en el punto más alto se convierte en la energía cinética adquirida en la posición de partida mas el trabajo contra las fuerzas de rozamiento, o sea:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \mu mg\cos 30 \frac{h}{\operatorname{sen}30^o}$$

de donde:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - \mu mg\cos 30 \frac{h}{\operatorname{sen}30} \quad \text{(b)}$$

dividiendo la ecuación (a), por la (b), obtenemos:

$$\frac{v_o^2}{v^2} = \frac{1 + \mu \operatorname{cotg} 30^o}{1 - \mu \operatorname{cotg} 30^o}$$

el valor de μ será:

$$\mu = \frac{v_o^2 - v^2}{v_o^2 + v^2} \operatorname{tg} 30^o = \frac{144-36}{144+36} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0{,}346$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-12. Un hombre de peso P salta desde una lancha que pesa P_1 a la orilla del río, haciendo hincapié para procurarse una velocidad horizontal V dada. La lancha retrocede pero tiene que vencer la resistencia del agua $R = K v_1^2$, en la que $\underline{K}$ es una constante y v_1 la velocidad variable de la barca. Determinar:

1°) La velocidad inicial de la barca

2°) El impulso que el hombre ejerce sobre la barca

3°) Velocidad de la barca al cabo del tiempo t.

****

1º) Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento al sistema hombre-barca.

$$\frac{P}{g} v = \frac{P_1}{g} v_1$$

y la velocidad incial de la barca será:

$$\boxed{v_1 = \frac{P}{P_1} v}$$

2º) El impulso ejercido por el hombre es igual a la variación de cantidad de movimiento de la barca, luego:

$$J = mv_1 - mv_o = \frac{P_1}{g} v_1$$

3º) Aplicando el principio fundamental de la dinámica

$$R = kv^2 = ma = m \frac{dv}{dt}$$

de donde
$$\frac{P_1}{g} \frac{dv}{v^2} = k\, dt$$

integrando esta ecuación.

$$t = \frac{P_1}{kg} \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v^2} = \frac{P_1}{kg} \left[-\frac{1}{v} \right]_{v_1}^{v} = \frac{P_1}{kg} \left[\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v} \right]$$

la ecuación de la velocidad en función del tiempo es:

$$\boxed{\frac{1}{v} = \frac{1}{v_1} - \frac{gk}{P_1} t}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IV-13. Calcular la aceleración del sistema de la figura y la tensión en cada cuerda.
Datos: $M_A = 30$ Kg, $M_B = 10$ Kg, $M_c = 10$ Kg, coeficiente de rozamiento de M_B con la superficie $\mu = 0{,}1$.

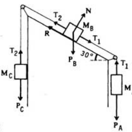
****

Considerando el sistema formado por los tres bloques y aplicando a dicho sistema la segunda ley de Newton, obtendremos:

$$M_A g + M_B g \operatorname{sen} 30 - \quad M_B g \cos 30 - M_C g = (M_A + M_B + M_C)\, a$$

de donde:

$$a = g \,\frac{30 + 5 - 0{,}1 \;\; 10\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 10}{30 + 10 + 10} = 4{,}73\ \mathrm{ms}^{-2}$$



Apliquemos la segunda ley de Newton al bloque M_A, se obtiene :

$$M_A g - T_1 = M_A a$$

de donde:

$$T_1 = M_A(g-a) = 30\,(9{,}8-4.73) = 152{,}1 \text{ Newton}$$

procedamos del mismo modo con el bloque M_C

$$T_2 - M_C g = M_C a \quad \Rightarrow \quad T_2 = M_C(g+a) = 10\,(9{,}8+4{,}73) = 145{,}3 \text{ Newton}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.

IV-14. Calcular la aceleración de los cuerpos y la tensión de las cuerdas en las fig. (a) y (b) siendo el coeficiente de rozamiento de m_1 con el suelo 0,2, $m_1 = 50$ g., $m_2 = 100$ gr. y $F = 2$ Nw. $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

****

En el caso correspondiente a la fig. (a) consideremos aisladamente el bloque m_1 y después el m_2 y apliquemos a dichos sistemas el principio fundamental de la dinámica, tendremos:

bloque m_1 $\quad F - T_1 - F_R = m_1 a$

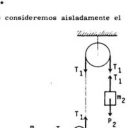
bloque m_2 $\quad T_1 - m_2 g = m_2 a$

de donde:

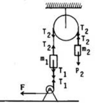
$$a = \frac{F - g m_2 - \mu g m_1}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{2 - 10(0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}1)}{0{,}5} = \underline{\underline{6\ \mathrm{m/s^2}}}$$

y $\quad T_1 = m_2(g + a) = 0{,}1 \times 16 = \underline{\underline{1{,}6\ \mathrm{Nw}}}$



Procediendo analogamente en el caso de la fig. (b)



bloque m_1 $\quad T_1 - m_1 g - T_2 = m_1 a'$

bloque m_2 $\quad T_2 - m_2 g = m_2 a'$

además $\quad T_1 = F = \underline{\underline{2\ \text{Nw}}}$

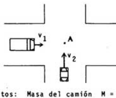
de donde:

$$a' = \frac{F + gm_1 - gm_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 + 10\times 0{,}05 - 10\times 0{,}1}{0{,}15} = \frac{1{,}5}{0{,}15} = \underline{\underline{10\text{m/s}^2}}$$

y $\quad T_2 = m_2(g + a') = 0{,}1\times 20 = \underline{\underline{2\ \text{Nw}}}$

=.=.=.=.=.=.=.=

IV-15. Un camión y un coche caminan por dos calles perpendiculares como indica la fig. y llegan al punto A al mismo tiempo. Se produce un choque no elastico quedando los dos juntos.



Calcular: 1°) La velocidad que adquiere el conjunto después del choque y la dirección en que salen despedidos.

2°) Espacio que recorren hasta pararse, despues del choque, si el coeficiente de rozamiento es K.

3°) Pérdida de energía cinética en el choque

Datos: Masa del camión M = 10 Tn., masa del coche m = 1 Tn, velocidad del camión v = 72 Km/h., velocidad del coche v_2 = 144 Km/h, K = 0,2.

****

1º) Apliquemos el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

$$M\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = (M + M)\,\vec{v}$$

Tomemos como ejes coordenados los ejes de las dos calles y por origen el punto en el que se produce el choque y proyectemos sobre estos ejes la ecuación vectorial antes obtenida.

proyección sobre el eje horizontal $\quad Mv_1 = (M+m)\,v\cos\alpha$

" " " " vertical $\quad mv_2 = (M+m)\,v\operatorname{sen}\alpha$

elevando al cuadrado ambas igualdades y luego sumando, obtenemos:

$$v = \frac{\sqrt{M^2 v_1^2 + m^2 v_2^2}}{M + m} = \frac{\sqrt{100\cdot 400 + 1\cdot 1600}}{11} = 18{,}5\,\text{m/s} = 66{,}7\ \text{km/h}$$

también obtenemos la dirección, en que salen despedidos los vehículos, dividiendo miembro a miembro las mismas ecuaciones.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{mv_2}{Mv_1} = \frac{144}{720} = 0{,}2$$

2º) La energía cinética de los vehículos después del choque se transforma en el trabajo realizado por el sistema camión-coche hasta pararse

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = (M+m)g\,\mu\,x$$

luego
$$x = \frac{v^2}{2\,g\,\mu} = \frac{18,5^2}{2\times 9,8\times 0,2} = \underline{84,7\ \text{m.}}$$

3º) La pérdida de energía cinética es:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,10000\times 400 + \frac{1}{2}\,1000\times 1600 - \frac{1}{2}\,11000\times 18,5^2 = \underline{972.625\ \text{julios}}$$

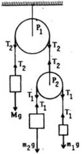
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-16. En el esquema indicado calcular la masa M y su aceleración para que la masa m_2 no se mueva. Se desprecia la masa de la cuerda y de las poleas.
Datos: $m_1 = 0,5$ Kg y $m_2 = 1$ Kg. Considérese $g = 10\ m/s^2$

****

Las tensiones en los dos ramales de la cuerda que pasa por la polea P_2 son iguales y las hemos llamado T_1. Como la polea P_1 tampoco tiene masa, también la tensión de la cuerda que pasa por ella es la misma en los dos ramales y la hemos llamado T_2. La relación entre T_1 y T_2 es:

$$T_2 = 2T_1$$



La aceleración con que asciende la masa M y, por tanto, la misma con que desciende P_2, la obtendremos aislando la masa M, o sea:

$$a_1 = \frac{T_2 - Mg}{M} = \frac{2T_1 - Mg}{M} \qquad \text{(a)}$$

Si llamamos a_2 la aceleración de las masas m_1 y m_2 respecto a la polea P_2, la aceleración absoluta de m_1, será $a_2 - a_1$ y la de la masa m_2, por tanto, $a_2 + a_1$. Aislando las masas m_1 y m_2, obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 - m_1 g = m_1(a_2 - a_1) \\ m_2 g - T_1 = m_2(a_2 + a_1) \end{array}\right\}$$

Como queremos que la masa m_1 no se mueva $\quad a_2 - a_1 = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = a_1$

y en consecuencia $\qquad T_1 = m_1 g = 5$ kg.

de donde:

$$m_2 g - m_1 g = 2m_2 a_1 \quad\Rightarrow\quad a_1 = a_2 = \frac{g(m_2 - m_1)}{2m_2} = \frac{5}{2} = \underline{2,5\ \text{m s}^{-2}}$$

Despejando M de la ecuación (a), obtenemos:

$$M = \frac{2T_1}{a_1 + g} = \frac{10}{12,5} = 0,8 \text{ kg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-17. Una cadena flexible está apoyada sobre la superficie indicada en la fig. La longitud de la cadena es L = 3m. y en el instante inicial AB = = h = $\frac{L}{3}$. Suponiendo que no existen rozamientos, calcular la velocidad del extremo C de la cadena cuando llegue al punto B.

****

Supongamos un instante en que sea x la longitud de cadena que se apoya en el plano inclinado, y llamemos $\lambda = \frac{P}{L}$ al peso por unidad de longitud de la cadena. Aplicando el principio fundamental de la dinámica

$$\lambda x \operatorname{sen}\alpha = \frac{\lambda L}{g} a \Rightarrow \frac{dv}{dt} = x \frac{g}{L} \operatorname{sen}\alpha$$

o sea

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = x \frac{g}{L} \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow v\,dv = x\,dx \frac{g}{L} \operatorname{sen}\alpha$$

integrando esta última ecuación, tendremos

$$\int_0^v v\,dv = \frac{g}{L} \operatorname{sen}\alpha \int_h^L x\,dx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{g}{L} \operatorname{sen}\alpha \; \frac{L^2 - h^2}{2}$$

o sea

$$v = \sqrt{g \frac{L^2 - h^2}{L}} \operatorname{sen}\alpha$$

sustituyendo

$$v = \sqrt{9'8 \; \frac{9 - 1}{3} \; \frac{1}{2}} = 3'61 \text{ m/s.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IV-18. Dos cilindros rectos, de sección circular, tienen la misma masa y dimensiones. Uno de ellos es macizo y homogéneo. El otro está formado con una chapa pesada, de espesor despreciable.

Ambos se sueltan juntos, a los largo de un plano inclinado a 30° con la horizontal. Sabiendo que ruedan sin deslizar por la pendiente; calcúlese a que distancia estarán el uno del otro, al cabo de 1 seg. de haber iniciado el movimiento. (La distancia se dedirá sobre el plano inclinado).

****

Llamemos l al espacio recorrido en 1 segundo por el cilindro macizo y aplicamos el principio de conservación de la energía, nos quedará:

$$m\ g\ l\ \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}\ m\ v^2 + \frac{1}{2} I\ \omega^2$$

o bien

$$m\ g\ l\ \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} mr^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}\ m\ v^2$$

pero

$$l = \frac{1}{2}\ a\ t^2 = \frac{1}{2} vt$$

luego

$$l = \frac{1}{3} g t^2 \text{sen}\ \alpha = \frac{g}{6}$$

llamando l' el espacio recorrido por el cilindro hueco y procediendo de forma análoga, tendremos:

$$m\ g\ l'\ \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} mr^2\ \frac{v'^2}{r^2} = m\ v'^2 = m \frac{4\ l'^2}{t^2}$$

o sea

$$l' = \frac{1}{4} g t^2 \text{sen}\ \alpha = \frac{g}{8}$$

la distancia pedida valdrá

$$d = l - l' = \frac{g}{6} - \frac{g}{8} = \frac{g}{24}$$

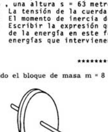
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.

IV-19. Un cilindro macizo, de 30 cm, de diámetro, puede girar alrededor de su eje longitudinal, apoyado sobre cojinetes en un plano horizontal, desprovistos de rozamiento. Sobre su superfecie tiene arrollada una cuerda, que soporta en su extremo libre un bloque de masa m = 8 Kg. Si- partiendo del reposo, el bloque desciende, con movimiento uniformemente acelerado , una altura s = 63 metros en 5 segundos. Hallar:

a) La tensión de la cuerda.
b) El momento de inercia del cilindro
c) Escribir la expresión que toma el principio de conservación de la energía en este fenómeno, y calcular cada una de las energías que intervienen en el mismo separadamente.

****

a) Aislando el bloque de masa m = 8 Kg. obtenemos:



$$mg - T = ma$$

como en t = 5seg. desciende s = 63 m.

$$s = \frac{1}{2}\ at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = \frac{126}{25} = 5{,}04\ \frac{m}{s^2}$$

luego:

$$T = m(g-a) = 38{,}08\ \text{Nw.}$$

b) Aislando la polea obtendremos:

$$T \cdot R = I\alpha$$

de donde:

$$I = \frac{T \cdot R}{\alpha} = \frac{T \cdot R^2}{a} = \frac{38{,}08 \times 0{,}15^2}{5{,}04} = 0{,}17\ kg\ m^2$$

c) En este caso, el principio de la conservación de la energía se expresará así

$$mgs = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

El primer miembro es la energía potencial perdida por el sistema

$$E_p = mgs = 8 \times 9{,}8 \times 63 = 4939{,}2 \text{ julios}$$

La energía cinética adquirida por el bloque de masa m es:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\, 2as = mas = 2540{,}16 \text{ julios}$$

y la energía cinética de rotación adquirida por el volante:

$$E_v = \frac{1}{2} I \omega^2 = 2399{,}04 \text{ julios}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

IV-20. Un coche de juguete, de masa total M = 1 Kg., está construido con cuatro ruedas macizas de masa m = 10 gr. El coche se deja en libertad en un plano inclinado de pendiente del 5% y, recorre 150 cm. en 2'5 segundos Encontrar el valor de g en el lugar de la experiencia. Las ruedas no deslizan.

****

Considerando las ruedas macizas, su momento de inercia es : $I = \frac{1}{2} mr^2$ la energía potencial perdida por el coche es igual a la energía cinética total adquirida por el mismo.

$$\frac{1}{2} M v^2 + 4 \frac{1}{2} I w^2 = M \cdot g \cdot h \qquad \text{pero} \quad h = l \text{ sen}\alpha$$

luego $\quad \frac{1}{2} M v^2 + 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \frac{v^2}{r^2} = M \cdot g \cdot l \text{ sen}\alpha$

de donde $\quad (M + 2m) v^2 = 2 M \cdot g \cdot l \text{ sen}\alpha$

como $\quad v^2 = 2 \cdot a \cdot l$

queda $\quad g = a \frac{M + 2m}{M \text{ sen}\alpha}$

además $\quad l = \frac{1}{2} a t^2 \quad$ y $\quad a = \frac{2l}{t^2}$

sustituyendo

$$g = \frac{2l}{t^2} \cdot \frac{M + 2m}{M \text{sen}\alpha} = \frac{3}{6{,}25} \cdot \frac{1{,}02}{0{,}05} = \underline{\underline{9{,}79 \text{ m/s}^2}}$$

=.=.=.=.=.=.=

IV-21. Dos poleas del mismo eje y radios r = 50 cm. y R = 80 cm. están unidos entre sí formando una polea doble cuya masa total es m = 200 kg. y cuyo radio de giro respecto del eje fijo es ρ = 60 cm. Los hilos arrollados en sentido contrario y de los que penden las masas M_1 = 100 kg. y M_2 = 50 kg., son de masa despreciable. El sistema se deja libre sin velocidad inicial en la posición dibujada.

A) Cuando la masa M_1 llegue al suelo, calcular la energía cinética E_1 que lleva y que se anula al chocar con el suelo.

B) Calcular la altura toral h recorrida por la masa M_2 desde la posición inicial hasta que queda parada.

No hay rozamientos y el eje de la polea está a H = 5 m del suelo

****

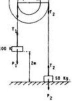
Sean a_1 y a_2 las aceleraciones respectivas de las masas M_1 y M_2. Apliquemos al bloque M_1, al bloque M_2 y a la polea doble, las ecuaciones fundamentales de la dinámica.

masa M_1 $\qquad P_1 - T_1 = M_1 a_1 \qquad$ (a)

masa M_2 $\qquad T_2 - P_2 = M_2 a_2 \qquad$ (b)

polea doble $\qquad T_1 r - T_2 R = I \cdot \alpha \qquad$ (c)

además $\qquad \alpha = \dfrac{a_1}{r} = \dfrac{a_2}{R}$



de la ecuación (a) obtenemos:

$$T_1 = P_1 - M_1 a_1 = M_1 g - M_1 a_1$$

de la ecuación (b) obtenemos

$$T_2 = P_2 + M_2 a_2 = M_2 g + M_2 \frac{R}{r} a_1$$

sustituyendo estos valores en (c) obtendremos:

$$M_1 r g - M_1 r a_1 - M_2 R g - M_2 \frac{R^2}{r} a_1 = m \rho^2 \frac{a_1}{r}$$

de donde

$$a_1 = g \frac{M_1 r - M_2 R}{M_1 r + M_2 \frac{R^2}{r} \cdot m \frac{\rho^2}{r}} = 0{,}386 \text{ m/s}^2$$

y la velocidad de M_1 al llegar al suelo,

$$v_1 = \sqrt{2 a_1 h} = \sqrt{2 \cdot 0{,}386 \cdot 2} = 1{,}24 \text{ m/s}$$

la energía cinética al llegar al suelo:

$$E_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = 76{,}5 \text{ julios}$$

Cuando la masa M_1 llega al suelo, la masa M_2 ha ascendido una altura $h_2 = h_1 \frac{R}{r} = 2 \, \frac{80}{50} = 3{,}2$ m y lleva una velocidad $v_2 = v_1 \, \frac{R}{r} \simeq 2$ m/s.

Para calcular la deceleración a_2', del bloque M_2, aislemos este bloque y la polea doble, obtendremos:

bloque M_2 $\qquad P_2 - T_2' = M_2 a_2'$

polea doble $\qquad T_2' R = I \alpha' = I \dfrac{a_2'}{R}$

obtenemos

$$M_2 g R - M_2 R a_2' = m \rho^2 \frac{a_2'}{R}$$

de donde
$$a_2' = g\,\frac{M_2 R}{M_2 R + m\dfrac{\rho^2}{R}} = 3{,}07\ \mathrm{m/s^2}$$

cuando M_2 se pare se verificará
$$v_2^2 - 2a_2' h_2' = 0 \qquad \text{o sea} \qquad h_2' = \frac{v_2^2}{2a_2'} = 0{,}65\ \mathrm{m.}$$

la altura total recorrida por M_2, será

$$H = h_2 + h_2' = 3{,}2 + 0{,}65 = \underline{3{,}85\ \mathrm{m}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IV-22. Una rueda maciza de 32 cm. de diámetro que pesa 17'3 Kg. se desea que gire a 385 rev/min., aplicandole, para ello, dos fuerzas de 2'6 Kg en sentidos opuestos sobre su periferia. ¿Cuánto tiempo tardaría en lograrse si no existiese ninguna clase de rozamiento?¿Y cuánto se retardará realmente si los rozamientos equivalen a un par de rodadura de 150 gr.m.? Si una vez lograda dicha velocidad se dejará a la rueda girar libremente, ¿cuánto tiempo seguiría todavía, según se considere o no la presencia del par de rodadura?

¿Ppor qué razón es absurda la hipótesis de suponer que no actua dicho par en la segunda parte del problema, y no lo es en la primera?

****

La rueda maciza tiene un momento de inercia: $I = \frac{1}{2} m r^2$

Aplicando el principio fundamental de la dinámica de rotación, tenuremos

$$M = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I} = \frac{F \cdot 2r}{\frac{1}{2} m r^2} = \frac{4F}{m r} = \frac{4 \times 2'6 \times 9'8}{17'3 \times 0'16} = 36'8\ \mathrm{rad/seg^2}$$

como es un movimiento de aceleración angular constante, obtendremos

$$\omega = \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{385 \times 2\pi}{36'8 \times 60} = 1{,}09\ \ \mathrm{seg.}$$

En el caso de existir rozamientos, se procede de forma semejante al caso anterior.
$$M - M' = I\alpha' \Rightarrow \alpha' = \frac{M - M'}{I} = \frac{F \cdot 2r - 0'15\ \ 9'8}{1/2\ m r^2} = 30{,}2\ \mathrm{rad/seg^2}$$

y
$$t' = \frac{\omega}{\alpha'} = \frac{385 \cdot 2\pi}{30{,}2 \cdot 60} = 1{,}33\ \mathrm{seg.}$$

Si una vez alcanzada la velocidad de 385 rev/min. se dejará a la rueda girar libremente y no **existiesen rozamientos**, la rueda giraría indefinidamente con la misma velocidad que ha adquirido.

Con rozamientos, por el contrario, el movimiento sería uniformemente retardado, con una aceleración angular

$$\alpha'' = \frac{M'}{I} = \frac{0'15 \times 9'8}{\frac{1}{2}17'3 \times 0'16^2} = 6'65 \quad rad/seg^2$$

y teniendo en cuenta que la velocidad angular final es nula, obtendríamos

$$\omega = \omega_o - \alpha'' t'' = 0 \Rightarrow t'' = \frac{\omega_o}{\alpha''} = \frac{385 \times 2\pi}{6'65 \times 60} = 3{,}03 \text{ seg.}$$

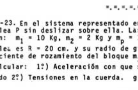
En la segunda parte la hipótesis es absurda porque, el no tener en cuenta el rozamiento, nos ha conducido a que la rueda nunca se pararía, hecho evidente mente falso. Sin embargo, en la primera parte, cuando el rozamiento es pequeño, mediante un par suficientemente grande, puede conseguirse un movimiento real y acelerado.

=.=.=.=.=.=.=.=

IV-23. En el sistema representado en la figura la cuerda arrastra a la polea P sin deslizar sobre ella. Las masas de los bloques de la polea son: m_1 = 10 Kg, m_2 = 2 Kg y m_p = 10 Kg. El radio de la llanta de la polea es R = 20 cm. y su radio de giro ρ = 10 cm. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento del bloque m_2 con el plano inclinado es μ = 0, 2. Calcular: 1°) Aceleración con que sube el bloque m_2 por el plano inclinado 2°) Tensiones en la cuerda. $g = 10\ m/s^2$

****

1º) y 2º) Aislando el bloque m_1 y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica:



$$m_1g - T_1 = m_1a \quad \text{(a)}$$

aislando el bloque, obtendremos:

$$T_2 - \mu m_2 g\cos\alpha - m_2 g\,\text{sen}\,\alpha = m_2a \quad \text{(b)}$$

aislando la polea y aplicando el principio fundamental de la dinámica de rotación, tendremos:

$$T_1R - T_2R = I\alpha$$

Siendo: $I = m_p\,\rho^2$ y $\alpha = \frac{a}{2}$

la última ecuación nos quedará:

$$(T_1 - T_2)R = m_p\,\rho^2\frac{a}{R} \Rightarrow T_1 - T_2 = m_p a\frac{\rho^2}{R^2} \qquad \text{(c)}$$

de la ecuación (a) despejamos T_1 : $T_1 = m_1g - m_1a$

" " " (b) " T_2 : $T_2 = m_2a + m_2g(\mu\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)$

y sustituyendo estos valores en (c), obtendremos:

$$m_1 g - m_1 a - m_2 a - m_2 g\,(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = m_p\, a\, \frac{\rho^2}{R^2}$$

de donde:

$$a = g\,\frac{m_1 - m_2(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)}{m_1 + m_2 + m_p\dfrac{\rho^2}{R^2}} = 10\,\frac{10-2\left(0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{10+2+10\ 4} = 1{,}66\ \text{m/s}^2$$

2º)

$$T_1 = m_1(g-a) = 10(10-1{,}66) = 83{,}4\ \text{Newtons.}$$

$$T_2 = m_2\left[a + g(\mu\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\right] = 2\left[1{,}66+10\left(0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] = 16{,}78\ \text{Newtons}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

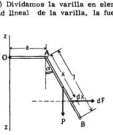
IV-24. Una varilla AB de longitud l, de masa m, está articulada en A, siendo AO una barra fija al eje zz', y el sistema gira alrededor del eje zz' con una velocidad angular ω.

1º) El valor de la fuerza de inercia (centrífuga) sobre AB en función de α.
2º) El punto de aplicación de dicha fuerza
3º) Si la varilla está en equilibrio para $\alpha = \varphi$ ¿cuál debe ser la velocidad angular ω?

****

1º) Dividamos la varilla en elementos de longitud dx y llamemos λ a la densidad lineal de la varilla, la fuerza de inercia sobre ese elemento será

$$dF = dm\,\omega^2 r = \lambda\,dx\,\omega^2(a + x\operatorname{sen}\alpha)$$



la fuerza de inercia resultante será

$$F = \lambda\,\omega^2\int_0^l (a + x\operatorname{sen}\alpha)\,dx =$$

$$= \lambda\,\omega^2\left(al + \frac{l^2}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= \omega^2\lambda\, l\left(a + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= m\omega^2\left(a + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$$

2º) El momento de dF con respecto a A vale

$$dM = dF\cdot x\cos\alpha = \lambda\,\omega^2\cos\alpha\,(a + x\operatorname{sen}\alpha)\,x\,dx$$

el momento resultante será igual al momento de la resultante, luego

$$m\omega^2\left(a + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)\eta\cos\alpha = \int_0^l \lambda\,\omega^2\cos\alpha\,(a + x\operatorname{sen}\alpha)\,x\,dx =$$

$$= \lambda \omega^2 \cos\alpha \left(\frac{a l^2}{2} + \frac{l^3}{3} \operatorname{sen}\alpha \right)$$

de donde
$$\eta = l \, \frac{\frac{a}{2} + \frac{l}{3} \operatorname{sen}\alpha}{a + \frac{l}{2} \operatorname{sen}\alpha}$$

3º) Para que el sistema esté en equilibrio dinámico el momento de la fuerza de inercia ha de ser igual al momento del peso respecto a A:

$$\cancel{m}\omega^2 \cos\varphi \left(\frac{a}{2} + \frac{l}{3} \operatorname{sen}\varphi \right) = \cancel{m} g \frac{l}{2} \operatorname{sen}\varphi$$

y
$$\omega = \sqrt{\frac{g\, l/2}{\frac{a}{2} + \frac{l}{3} \operatorname{sen}\alpha} \operatorname{tg}\varphi}$$

=.=.=.=.=.=

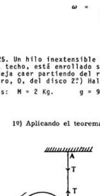
IV-25. Un hilo inextensible y de masa despreciable atado por su extremo A al techo, está enrollado sobre un disco de masa M y radio R. El disco se deja caer partiendo del reposo. Calcular: 1º) Aceleración lineal del centro, O, del disco 2º) Hallar la tensión del hilo.

Datos: M = 2 Kg. $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$.

****

1º) Aplicando el teorema del centro de gravedad, tendremos :

$$Mg - T = Ma$$



siendo a la aceleración del centro de gravedad, O , del disco.
Apliquemos ahora el principio fundamental de la dinámica de rotación, al disco en su rotación alrededor del eje que pasa por O y es perpendicular al plano de la figura, obtendremos

$$T R = I\alpha$$

pero $I = \frac{1}{2} M R^2$

y $\alpha = \frac{a}{R}$, luego

$$T R = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} \quad \text{o sea} \quad T = \frac{1}{2} Ma$$

sustituyendo en la primera ecuación nos quedará :

$$Mg - \frac{1}{2} Ma = Ma \qquad \text{o sea} \qquad a = \frac{2}{3} g = 6{,}54 \text{ m/s}^2$$

2º) La tensión valdrá :

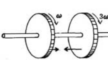
$$T = \frac{1}{2} Ma = \frac{Mg}{3} = \frac{2 \cdot 9,81}{2} = 6,54 \text{ Newton.}$$

=.=.=.=.=.=.=

IV-26. Dos discos homogéneos iguales, de masa M y de radio R, están montados sobre un mismo eje horizontal, tal como indica la figura. Ambos discos pueden girar y deslizar independientes sobre el eje común sin rozamiento. Las superficies de los discos son, por el contrario, rugosas. Supuestos animados de velocidades angulares respectivas ω y 3ω, en el mismo sentido, se deslizan sobre el eje hasta ponerlos en contacto observando que, al cabo de un cierto tiempo, giran juntos con la misma velocidad angular, como consecuencia del rozamiento entre sus caras contiguas. Hallar: 1°) Valor de la velocidad angular común. 2°) Trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento desde que se ponen los discos en contacto hasta que adquieren la misma velocidad.

****

1º) Apliquemos en principio de conservación del momento cinético, nos quedará :



$$I\omega + I \cdot 3\omega = 2I\omega'$$

de donde :

$$\boxed{\omega' = 2\,\omega}$$

2º) El trabajo perdido será igual a la variación de energía cinética experimentada por el sistema

$$W = \frac{1}{2} 2 \cdot I \cdot \omega'^2 - \left[\frac{1}{2} I\,\omega^2 + \frac{1}{2} I (3\omega)^2\right]$$

O sea :

$$W = 2\,M\,R^2\,\omega^2 - \frac{5}{2} M\,R^2\,\omega^2 = -\frac{1}{2}\,M\,R^2\,\omega^2$$

=.=.=.=.=.=.=

IV-27. Un disco homogéneo A de radio R = 1,2 m., gira alrededor de un eje vertical bajo la acción de la masa C unida a una cuerda que pasa por una polea ideal y que está enrollada alrededor del tambor cilíndrico, macizo, B solidario del disco. A éste va unida una masa puntual D, situada a una distancia d = 0,9m. del eje de giro. Se supone que la cuerda permanece siempre horizontal. Calcular:

1°) Aceleración angular del disco.
2°) Aceleración tangencial de D.
3°) Aceleración normal de D a los cuatro segundos después de partir del reposo.

Datos: m_A= 65kg, m_B= 8 kg, m_D= 4 kg, g = 10m/s^2

****

1º) Aislando la masa C y aplicando la formula fundamental de la dinámica, tenemos:

$$P_C - T = m_C a \quad \Rightarrow \quad T = m_C g - m_C \alpha r$$

Aplicando al sistema formado por A, B, D, el principio fundamental de la dinámica de rotación, obtendremos:

$$T\, r = I\alpha \quad \Rightarrow \quad m_C g r - m_C \alpha r^2 = I\alpha$$

de donde
$$\alpha = \frac{m_C g r}{I + m_C r^2}$$

siendo:

$$I = \frac{1}{2}m_A R^2 + \frac{1}{2}m_B r^2 + m_D d^2 = \frac{1}{2}65\times 1{,}44 + \frac{1}{2}15\times 0{,}45^2 + 4\times 0{,}81 = 51{,}55 \text{ kg m}^2$$

luego
$$\alpha = \frac{8\times 10\times 0{,}45}{51{,}55 + 8\ 0{,}45^2} = 0{,}67 \text{ rad/s}^2$$

2º) La aceleración tangencial de D, será:

$$a_D = \alpha d = 0{,}67\times 0{,}9 = 0{,}60 \text{ m s}^{-2}$$

3º) La aceleración normal vale :

$$a_n = \frac{v^2}{d} = \omega^2 d$$

pero
$$\omega = \alpha t = 0{,}67\times 4 = 2{,}68 \text{ rad/seg.}$$

luego
$$a_n = 2{,}68^2\times 0{,}9 = 6{,}46 \text{ m s}^{-2}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

C A P I T U L O   V

G R A V I T A C I O N

V-1. Deseamos colocar en órbita alrededor de la Tierra una cápsula espacial a la que hemos de comunicar una velocidad de 10 Km/s y en la cual viajarán seres vivos que no soportan aceleraciones superiores a "7g".

a) Julio Verne propuso emplear un cañón gigante. ¿Resistirán los seres vivos la aceleración en el cañón, suponiendo que éste tuviera 1 Km. de largo?

b) Si para lanzar la cápsula utilizamos un cohete animado de una aceleración constante igual a "6g" ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar la velocidad de 10 Km/s?

c) Si el cohete sigue la vertical, ¿cuánto aumentará el peso aparente de los objetos que haya en la cápsula?

****

a) Suponiendo uniformemente acelerado, el movimiento en el interior del cañón, se verificaría

$$V^2 = V_o^2 + 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(10^4)^2}{2.10^3} = 50000 \text{ m/s}^2 >> 7g$$

luego, los seres vivos, no resistirán la aceleración a que son sometidos

b) Apliquemos la fórmula $\qquad v = v_o + at$

de donde $$t = \frac{v}{a} = \frac{10000}{6g} = 170 \text{ seg.}$$

c) Sobre los objetos, del interior de la cápsula, actua una fuerza de inercia, que será igual al aumento del peso aparente de dichos objetos, o sea

$$P_a = F_i = m.a = 6mg$$

aumenta seis veces su peso real.

=.=.=.=.=.=.=.=

V-2. Suponiendo que la órbita terrestre es circular de $1,495 \times 10^8$ Km. de radio y que la Tierra invierte 365'25 días en su revolución completa, determinar la intensidad del campo gravitatorio solar en un punto que diste del centro del Sol la centésima parte que nuestro planeta.

****

La intensidad del campo gravitatorio solar en la Tierra, sería :

$$I_1 = \frac{F}{m_T} = G\frac{M_S}{r^2}$$

y en su punto situado a una distancia del Sol igual a $r' = \frac{r}{100}$, será

$$I_2 = G\frac{M_S}{\frac{r^2}{10^4}} = 10^4 I_1$$

la fuerza centrífuga sobre la Tierra es igual a la fuerza con la que es atraída por el Sol , luego :

$$G\frac{M_S m_T}{r^2} = m_T\frac{v^2}{r}$$

de donde :

$$I_1 = G\frac{M_S}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}r = \frac{4\pi^2 \cdot 1,495 \cdot 10^{11}}{(365,25 \cdot 24 \cdot 3600)^2} =$$

$$= 1,86 \cdot 10^5 \ \frac{Nw}{kg}$$

por tanto

$$I_2 = 10^4 \cdot I_1 = 1,86 \cdot 10^9 \ \frac{Nw}{kg}$$

=.=.=.=.=.=.=

V-3. La masa de la Luna es igual a 0,01255 veces la de la Tierra y su radio es igual a 0'273 veces el de la Tierra. ¿Cual es la aceleración de un cuerpo que cae libremente en la superficie de la Luna?

****

La aceleración de la gravedad en la Tierra es: $g_T = G\frac{M_T}{R_T^2}$

" " " " " " " " " : $g_L = G\frac{M_L}{R_L^2}$

de donde $$g_L = g_T \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2$$

sustituyendo valores, obtendremos

$$g_L = 9'81 \frac{0'01255}{(0'273)^2} = 1'65 \text{ m/s}^2$$

=.=.=.=.=.=.=

V-4. La masa de la Luna es aproximadamente $6{,}7.10^{22}$ kg. y su radio R = 16.10^5 metros. Constante de gravitación $6{,}67.10^{-11}$ new/kg^2.

a) ¿Qué distancia recorrerá un cuerpo en 1 seg.,en caída libre hacia la Luna, si se abandona en un punto próximo a la superficie de aquella?.

b) ¿Cual será el peso en la Luna de un hombre que en la Tierra pesa 70 kg.?

C) ¿Cual será el período de oscilación en la superficie lunar, de un péndulo que bate segundos en la superficie terrestre.

****

a) La aceleración de la gravedad en la superficie lunar será :

$$g = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6,67\cdot 10^{-11}\ \frac{6,7\cdot 10^{22}}{(16\cdot 10^5)^2} = 1,75 \text{ m/s}^2$$

en caída libre :

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1,75}{2} = 0,875 \text{ m.} = 87,5 \text{ cm.}$$

b) El peso del hombre en la Luna , será :

$$P_L = m\ g = \frac{70}{9,8}\ 1,75 = 12,5 \text{ kg.}$$

c) El período el pendulo en la Tierra es :

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,8}}$$

y en la Luna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1,75}}$$

dividiendo miembro a miembro

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{9,8}{1,75}} \quad \text{ó sea} \quad T = 2\sqrt{\frac{9,8}{1,75}} = \underline{\underline{4,72 \text{ seg.}}}$$

=.=.=.-.=.=.=

V-5. Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Mercurio, suponiendo los radios de Mercurio y la Tierra están en la relación 1/3 y sus densidades medias están en la relación 3/5. Tómese como valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre $g = 10\ m/s^2$

****

El valor de la gravedad en la Tierra será :

$$g_t = G\frac{M_t}{R_t^2}$$

y en Mercurio

$$g_m = G\frac{M_m}{R_m^2}$$

de donde :

$$g_m = g_t\frac{M_m}{M_t}\ \frac{R_t^2}{R_m^2}$$

como $M_t = \frac{4}{3}\pi R_t^3\rho_t$ y $M_m = \frac{4}{3}\pi R_m^3\rho_m$

tendremos :

$$\frac{M_m}{M_t} = \frac{R_m^3}{R_t^3}\cdot\frac{\rho_m}{\rho_t}$$

y nos quedará :

$$g_m = g_t\frac{R_m}{R_t}\ \frac{\rho_m}{\rho_t} = g_t\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \underline{\underline{2\ m/s^2}}$$

=.=.=.=.=.=.=

V-6. a) Para lanzar un satélite desde la Tierra se utiliza un cohete cuyo "motor" desarrolla, al partir, un empuje vertical de 120.000 Kilos fuerza. El conjunto cohete-satélite tiene una masa de 100 Tm. Calcular la aceleración de partida .

b) El cohete, constituido en su mayor parte de combustible, pierde poco a poco masa a causa de la combustión. La aceleración máxima alcanza cuando el conjunto cohete-satélite ha perdido el 80% de su masa; suponiendo que se haya mantenido constante el empuje, calcular esa aceleración máxima.

c) Una vez separado el satélite del cohete describe aquél una órbita. Calcular a 1000 Km. sobre la superficie terrestre a la velocidad de 27.000 Km/h. Calcular: 1º la aceleración del satélite en su órbita. (Radio terrestre 6300 Km.); 2º) la fuerza que actúa sobre el satélite, sabiendo que la masa de éste es de 2 Tm.

En todo el problema se supone constante el valor de g.

****

a) Calculemos la aceleración de partida

$$E - P = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{E - P}{m} = \frac{(120000-100000)9'8}{100.000} = 1,96\ m.s^{-2}$$

b) La aceleración máxima es

$$E - P' = m'a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{E - P'}{m'} = \frac{(120000-20000)9'8}{20000} = 49\ m\cdot s^{-2}$$

c-1) La aceleración del satélite en la órbita indicada, debe ser

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{27000^2}{1000+6300} = \frac{729000000}{7300} = 100000\ Km\cdot h^{-2} = 7'7\ m\cdot s^{-2}$$

c-2) La fuerza sobre el satélite

$$F = \frac{m\,V^2}{R} = 2000\cdot 7'7 = 15400\ Nw.$$

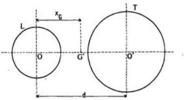
=.=.=.=.=.=.=.=

V-7. El centro de gravedad del sistema formado por la Tierra y la Luna dista 379.440 Km. del centro de la Luna. Sabiendo que la distancia Luna-Tierra es de 384.000 Km, calcular a partir de estos datos cuantas veces mayor es la masa de la Tierra que la de la Luna.

****

Tomando como origen de coordenadas el centro de la Luna y aplicando que:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$



tendremos:

$$379440 = \frac{384000\ M_T}{M_T + M_L}$$

de donde:

$$4560\ M_T = 379440\ M_L$$

o sea: $$M_T = \frac{379440}{4560} M_L = 83,21\ M_L$$

la masa de la Tierra es aproximadamente 83,21 veces la masa de la Luna.

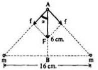
=.=.=.=.=.=.=.=

V-8. Dos masas esfericas iguales, de m = 6,4 Kg. cada una, están fijadas a dos puntos separados 16 cm. Una tercera masa se suelta en un punto A equidistante de las masas anteriores y a una distancia de 6 cm. de la linea que los une. Si suponemos que la masa móvil es de m' = 100 gr., calcular: 1º) La aceleración de dicha masa cuando está en las posiciones A y B. 2º) Velocidad que llevará cuando pase por B. G = 6,67 x 10^{-8} dinas. cm^2/g^2

****

1º) La fuerza gravitatoria, debida a cada masa m, sobre la masa m', cuando está situada en A, es

$$= G\ \frac{m\,m'}{r} = G\ \frac{6400 \cdot 100}{10} = 64000\,G$$



y la fuerza resultante sobre m', es

$$F = 2\,f\,\cos\alpha = 128000\ G\ \frac{6}{10} = 76800\ G$$

la aceleración de m', cuando está en A, es

$$a = \frac{F}{m'} = \frac{76800\ G}{100} = 768 \cdot 6'67 \cdot 10^{-8} = 5,122 \cdot 10^{-5}\ \text{cm/s}^2$$

La **aceleración de m'**, cuando está en B, es cero, ya que la resultante de las fuerzas ejercidas por las dos masas m sobre m', en la posición B, es nula.

2º) El potencial en A, debido a cada una de las masas m, es

$$V_A = -\,G\ \frac{m}{r} = -\,G\ \frac{6400}{10} = -\,640\ G\ \text{ergios/g}$$

La energía potencial de la masa m', en el punto A, es

$$E_{PA} = -\,2\,m'\,V_A = -2 \cdot 100 \cdot 640\ G = -128 \cdot 10^3 \cdot G\ \ \text{ergios}$$

El potencial en B, debido a cada una de las masas m, es

$$V_B = -\,G\ \frac{m}{r} = -\,G\ \frac{6400}{8} = -\,800\ G\ \text{ergios/g}$$

La energía potencial ded masa m', en la posición B, es

$$E_{P_B} = -\,2\,m'\,V_B = -\,2 \cdot 100 \cdot 800\ G = -\,160 \cdot 10^3 G\ \text{ergios}$$

Aplicando conservación de la energía, tendremos

$$E_{P_A} = E_{P_B} + E_{c_B}$$ ya que la velocidad, el el punto A, es cero, o sea

$$-128 \cdot 10^3 G = -\,160 \cdot 10^3 G + \frac{1}{2}\,m' v_B^2 \qquad v_B^2 = 4268'8 \cdot 10^{-8}$$

de donde $$V_B = 6'54 \cdot 10^{-3}\ \text{cm/s}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.

CAPITULO VI

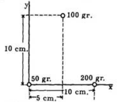
GEOMETRIA DE MASAS

VI-1. Hallar el centro de masas de las masas indicadas en la figura

****

Las coordenadas del centro de gravedad vienen dadas por :

$$\begin{cases} x_o = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ y_o = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \end{cases}$$



En este caso quedará :

$$x_o = \frac{100 \cdot 5 + 200 \cdot 10}{100 + 200 + 50} = \frac{2500}{350} = \frac{50}{7}$$

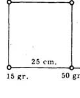
$$y_o = \frac{100 \cdot 10}{100 + 200 + 50} = \frac{1000}{350} = \frac{20}{7}$$

=.=.=.=.=.=

VI-2. Se colocan masas de 15 gr., 25 gr., 40 gr y 50 gr en los vértices de un cuadrado de 25 cm. de lado. Hallar la posición del centro de masas de dichas masas

****

Tomando como eje coordenados los indicados en la figura, tendremos :



$$x_o = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{40 \cdot 25 + 50 \cdot 25}{15 + 25 + 40 + 50} = 15,7$$

$$y_o = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{25 \cdot 25 + 40 \cdot 25}{15 + 25 + 40 + 50} = 10,9$$

=.=.=.=.=.=.=

VI-3. La densidad variable de una barra de longitud, l, viene dada por la expresión, $\rho = \rho_o(1+k \cdot x)$, siendo, x la distancia de un punto cualquiera de la barra al extremo de la misma, en el que la densidad es, ρ_o, y k una constante. Encontrar la posición del centro de gravedad de la barra. Aplicación al caso $K = \frac{1}{l}$

****

Si tomamos un elemento de la barra de longitud, dx , situado a la distancia x del extremo y llamamos , s, a la sección de la varilla , la masa de este elemento de barra será :

$$dm = \rho\, dv = \rho\, s\, dx = s\, \rho_o (1 + kx)\, dx$$

El centro de gravedad estará a una distancia , x_o , del extremo

$$x_o = \frac{\int dm\, x}{\int dm} = \frac{s\, \rho_o \int_0^l (1+kx)\, x\, dx}{s\, \rho_o \int_0^l (1+kx)\, dx} = \frac{\frac{l^2}{2} + k\frac{l^3}{3}}{1 + k\frac{l^2}{2}} = \boxed{\frac{3l + 2kl^2}{6 + 3kl}}$$

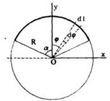
Aplicación : $\boxed{x_o = \frac{2}{3}\, l}$

=.=.=.=.=.=.=

VI-4. Hallar el centro de gravedad de un arco de circunferencia de radio R y amplitud 2α.

****

1er procedimiento



Tomemos como ejes la recta que pasa por O y el punto medio del arco y la recta perpendicular , por O, al anterior.
Como OY es un eje de simetría el centro de gravedad estará sobre dicho eje, basta calcular la distancia al punto O.

$$y_o = \frac{\int y\,dl}{\int dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\varphi\ R\,d\varphi}{2\,R\,\alpha} = \frac{R^2\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\varphi\,d\varphi}{2\,R\alpha} = R\,\frac{\left[\operatorname{sen}\varphi\right]_{-\alpha}^{+\alpha}}{2\alpha} =$$

$$= R\,\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\alpha} = \underline{\underline{R\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}}}$$

2º procedimiento

Aplicando el teorema de Guldin : $\quad 2\pi y_o \int dl = \int 2\pi y\,dl$

o sea $\quad 4\pi R\alpha y_o = 2\pi\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\varphi\ R\,d\varphi$

de donde $\quad 2\alpha y_o = R\,2\operatorname{sen}\alpha$

$$\boxed{y_o = R\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}}$$

=.=.=.=.=.=.=

VI-5. Una chapa delgada tiene la forma de la figura. Se pide encontrar la relación entre a y h para que el centro de gravedad de la chapa esté en el punto M.

****

La distancia del centro de gravedad del rectángulo al punto , O, es :

$$\overline{OG}_1 = \frac{a}{2}$$

y del centro de gravedad del triángulo al mismo punto O, es:

$$\overline{OG}_2 = a + \frac{1}{3}h$$

Las áreas del rectángulo y del triángulo son:

$$S_R = a\cdot b \quad y \quad S_T = \frac{1}{2}bh$$

Tomando momentos respecto al punto O, tendremos:

$$\frac{a}{2} \cdot ab + \frac{1}{2} bh\left(a + \frac{1}{3}h\right) = a\left(ab + \frac{1}{2} bh\right)$$

dividiendo los dos miembros por b y simplificando

$$\frac{a^2}{2} + \frac{1}{6}h^2 = a^2 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{1}{6}h^2 = \frac{1}{2}a^2$$

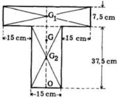
de donde : $\boxed{\frac{h}{a} = \sqrt{3}}$

=.=.=.=.=.=.=.

VI-6. Dada la sección en T, cuyas dimensiones se indican en la figura, calcular la posición de su centro de gravedad.

****

Descomponemos la T en dos rectángulos cuyos centros de gravedad serán G_1 y G_2 tendremos :



$OG_1 = 37,5 + \frac{7,5}{2} = 41,25\,\text{cm}.$

y $OG_2 = 18,75$ cm.

Area del rectángulo superior :

$S_1 = 45 \cdot 7,5 = 337,5\ \text{cm}^2$

Area del rectángulo inferior :

$S_2 = 15 \cdot 37,5 = 562,5\ \text{cm}^2$

Area total : $S = S_1 + S_2 = 900\ \text{cm}^2$

Tomando momentos respecto al punto O, tendremos :

$$S_1\,\overline{OG}_1 + S_2\,\overline{OG}_2 = (S_1 + S_2)\,\overline{OG}$$

de donde : $\overline{OG} = \frac{337,5 \cdot 41,25 + 562,5 \cdot 18,75}{337,5 + 562,5} = \frac{24468,75}{900} = 27,18\ \text{cm}.$

=.=.=.=.=.=.=.=

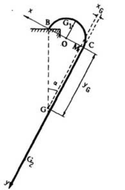
VI-7. Un bastón está constituido por una semicircunferencia de radio, R, que es la empuñadura y una parte rectilínea de longitud l = 16R. Está hecho de una materia homogénea y su sección es constante.
1º) Hallar el centro de gravedad de la empuñadura
2º) Hallar el centro de gravedad del bastón
3º) Si apoyamos el bastón cerca del borde de una mesa, determinar el ángulo que formará con la vertical, la parte recta del bastón, en la posición de equilibrio.

****

1º) Apliquemos el teorema de Guldin para calcular OG_1 , tendremos :

$$4\pi R^2 = \pi R \times 2\pi \overline{OG}_1$$

y $\boxed{\overline{OG}_1 = \frac{2R}{\pi}}$



2º) Tomemos como ejes coordenados: La parte recta del bastón como eje de las y, la recta CB como eje de las x. Las coordenadas de G_1 y G_2 con respecto a estos ejes son :

$$G_1\left(R, -\frac{2R}{\pi}\right)$$

$$G_2\left(0, \frac{l}{2}\right)$$

siendo $l = 16R$

si tomamos, ρ , como densidad lineal de la materia del bastón, las masas de empuñadura y parte recta serán respectivamente :

$$m_1 = \pi R\rho \qquad y \qquad m_2 = 16R\rho$$

las coordenadas del centro de gravedad del bastón serán :

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\pi \cancel{R}\cancel{\rho}\cdot R}{\cancel{\rho}\cancel{R}(\pi + 16)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{16+\pi} R}}$$

$$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{-\cancel{\pi}\cancel{R}\cancel{\rho}\frac{2R}{\cancel{\pi}} + 16\cancel{R}\cancel{\rho}\,8R}{\cancel{\rho}\cancel{R}(\pi + 16)} = \underline{\underline{\frac{126}{16+\pi} R}}$$

3º) En la posición de equilibrio G ha de estar en la vertical de B, luego :

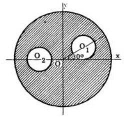
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2R - x_G}{y_G} = \frac{32+\pi}{126} \qquad \underline{\underline{\alpha = 15º\ 35'}}$$

=.=.=.=.=.=

VI-8. A una lámina circular delgada, de radio R, se le han practicado dos orificios circulares de radio $C = \frac{R}{4}$ que estan situados como indica la figura. Sabiendo que $OO_1 = OO_2 = \frac{R}{2}$, determinar las coordenadas del centro de la lámina resultante.

****

Tomamos como ejes coordenados los indicados en la figura, las coordenadas de O, O_1 y O_2, serán :



$O\,(0, 0)$

$O_1\left(\frac{R\sqrt{3}}{4},\ \frac{R}{4}\right)$

$O_2\left(-\frac{R}{2},\ 0\right)$

Area de la lámina, sin orificios :

$$S = \pi R^2$$

Area de cada uno de los orificios :

$$S' = \frac{\pi R^2}{16}$$

Las coordenadas del centro de gravedad, serán :

$$x_o = \frac{\frac{\pi R^2}{16}\cdot\frac{R}{2} - \frac{\pi R^2}{16}\,\frac{R\sqrt{3}}{4}}{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{8}} = R\,\frac{2-\sqrt{3}}{56}$$

$$y_o = \frac{-\frac{\pi R^2}{16}\,\frac{R}{4}}{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{8}} = -\frac{1}{56}\,R$$

=.=.=.=.=.=.=.=

VI-9. Calcular el momento de inercia de una varilla delgada, homogénea de masa m y longitud l:

a) Respecto al eje que pasa por el centro de gravedad y es perpendicular a la varilla
b) Respecto al eje que pasa por uno de los extremos y es perpendicular a la barra.
c) Respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y forma un ángulo α con la varilla.
d) Respecto a un eje que corta a la varilla en un punto distante $\frac{1}{4}l$ del centro de gravedad y forma un ángulo α con la varilla

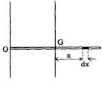
****

A) Descomponiendo la varilla en elementos de longitud dx y llamando ρ a la densidad lineal de la varilla, tendremos:

$$I_G = 2\int_0^{l/2} x^2 dm = 2\rho\int_0^{l/2} x^2 dx = 2\rho\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{1}{12}\rho l^3$$

la masa de la varilla es $m = \rho\cdot l$

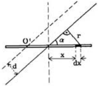
luego $\boxed{I_G = \frac{1}{12} m l^2}$



b) Aplicando el teorema de Steiner:

$I_o = I_G + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$

c) La distancia, r, del elemento de varilla al eje vale: $r = x\,\text{sen}\,\alpha$, luego:



$$I_G' = 2\int_0^{1/2} r^2 dm = 2\text{sen}^2\alpha\int_0^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{12}\rho l^3 \text{sen}^2\alpha$$

o sea :

$$I_G = \frac{1}{12}ml^2\text{sen}^2\alpha$$

d) Apliquemos Steiner siendo, en este caso, la distancia entre ejes $d = \frac{l}{4}\text{sen}\,\alpha$ quedará

$$I_{o'} = I_G' + m\frac{l^2}{16}\,\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{12}\,ml^2\text{sen}^2\alpha + \frac{1}{16}ml^2\text{sen}^2\alpha = \frac{7}{48}ml^2\text{sen}^2\alpha$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VI-10. Una varilla delgada de longitud, l, y masa, m, tiene una densidad variable $\rho = \rho_o\,(1 + \frac{x}{l})$, siendo x la distancia de un punto cualquiera de la varilla al extremo cuya densidad, ρ_o, es menor. Calcular:

1°) Momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a la varilla y que pasa por el extremo de densidad ρ_o.

2°) Momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular que pase por su centro de gravedad.

****

1º) La masa de un elemento de varilla de longitud dx, es:

$$dm = \rho\,dx = \rho_o\left(1 + \frac{x}{l}\right)dx$$

El momento de inercia respecto al extremo de la varilla

$$I = \int_0^l \rho_o\left(1 + \frac{x}{l}\right)x^2dx = \rho_o\left[\frac{l^3}{3} + \frac{l^4}{4}\right] = \frac{7}{12}\,\rho_o l^3$$

para expresar este momento en función de la masa de la varilla, calculemos m en función de ρ_o.

$$m = \int dm = \rho_o\int_0^l\left(1 + \frac{x}{l}\right)dx = \rho_o\left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{2}\,\rho_o l$$

por tanto: $\boxed{I = \frac{7}{18}\,ml^2}$

2º) Calculemos la distancia, d, del centro de gravedad de la varilla al extremo de menor densidad

$$d = \frac{\int_0^1 x\,dm}{\int_0^1 dm} = \frac{\rho_o \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{l}\right) x\,dx}{\frac{3}{2}\rho_o l} = \frac{\rho_o \left[\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{3}\right]}{\frac{3}{2}\rho_o l} = \frac{5}{9}\,l$$

Aplicando el teorema de Steiner: $I = I_G + m d^2$

quedará:

$$I_G = I - m d^2 = \frac{7}{18} m l^2 - \frac{25}{81} m l^2 = \underline{\underline{\frac{13}{162}}}\, m l^2$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VI-11. El cuadro de un galvanómetro D'Arsonval tiene n = 100 espiras muy apretadas; las longitudes de los lados de cada espira son: 2a = 2cm y 2b = 3 cm. Conociendo la densidad lineal del hilo de λ = 1 gr. cm , calcular el momento de inercia con respecto a un eje vertical.

****

El momento de inercia de un hilo paralelo al eje, será:

$$I_1' = m\,a^2 = 2\lambda b\,a^2$$

como hay 2n hilos de longitud 2 b, su momento de inercia, valdrá:

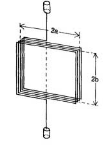
$$I_1 = 4n\lambda b\,a^2$$

El momento de inercia de un hilo perpendicular al eje que pasa por su punto medio es

$$I_2' = \frac{1}{12}\,m\,l^2 = \frac{1}{12}\,2\lambda a . 4a^2 = \frac{2}{3}\,\lambda\,a^3$$

como hay 2n hilos de longitud 2a, el momento de inercia del conjunto, valdrá

$$I_2 = 2n\,I_2' = \frac{4}{3}\,n\,\lambda\,a^3$$



El momento de inercia del cuadro es

$$I = I_1 + I_2 = 4n\lambda b a^2 + \frac{4}{3}\,n\lambda\,a^3 = 4n\lambda\,a^2 \cdot \left(b + \frac{a}{3}\right)$$

Sustituyendo los valores dados

$$I = 400\ \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2200}{3} = 733'3\ \text{gr. cm}^2 .$$

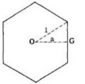
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VI-12. Con seis varillas delgadas, homogéneas l y masa m, cada una de ellas, se construye un exágono regular. Calcular el momento de inercia del exágono respecto a un eje perpendicular, en el centro de la figura, al plano de la misma.

****

El momento de inercia de una cualquiera de las varillas respecto a un eje que pase por su centro de gravedad y sea perpendicular a la varilla, será:

$$I_G = \frac{1}{12} m\, l^2$$



el momento de inercia de esta varilla respecto a un eje que pasaba por O y es perpendicular al plano del exágono, vale

$$I_o = I_G + ma^2 = \frac{1}{12} m\, l^2 + \frac{3}{4} ml^2 = \frac{5}{6} ml^2$$

El momento de inercia pedido será:

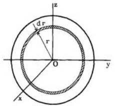
$$I = 6\, I_o = 5\, m \cdot l^2$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VI-13. Momento de inercia de un disco circular homogéneo de radio R y masa M, respecto a:
1º) Un eje perpendicular al plano del disco y que pase por su centro.
2º) Un diámetro.

****

1º) Llamemos σ a la densidad superficial del disco y descompongamos el disco en coronas circulares de anchura dr , la masa de estos elementos de disco será :



$$dm = \sigma\, 2\pi r\, dr$$

tendremos :

$$I_x = I_o = \int dm\, r^2 = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4} = \pi\sigma \frac{R^4}{2}$$

la masa del disco es :

$$M = \pi R^2 \sigma$$

por tanto :

$$I_x = I_o = \frac{1}{2} M R^2$$

2º) Por simetria $I_y = I_z$

además $I_y + I_z = I_o$

luego $I_y = I_z = \frac{I_o}{2} = \frac{1}{4} M R^2$

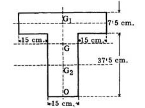
=.=.=.=.=.=.=

VI-14. Dada la sección en T, cuyas dimensiones se indican en la figura, calcular el radio de giro respecto a un eje horizontal que pase por el centro de gravedad.

****

Descompongamos la T en dos rectángulos cuyos centros de gravedad serán G_1 y G_2.

El momento de inercia del rectángulo superior recpecto al eje horizontal que pasa por G_1, es :



$$I_{G_1} = \frac{4}{3} \sigma a b^3 = \frac{4}{3} \sigma\, 22,5 \cdot 3,75^3 =$$

$$= 1582,03\, \sigma$$

La distancia $OG = 27,18$ cm (ver problema VI-6)

El momento de inercia de este rectángulo con respecto a un eje horizontal que pasa por G'.

$$I'_G = I_{G_1} + 337,5\, \sigma (41,25 - 27,18)^2 =$$

$$= 68 \cdot 393,53\, \sigma$$

El momento de inercia del rectángulo inferior respecto al eje horizontal que pasa por G_2, es :

$$I_{G_2} = \frac{4}{3} \sigma a b^3 = \frac{4}{3} \sigma\, 7,5 \cdot 18,75^3 = 65.917,96\, \sigma$$

respecto al eje que pasa por G', será

$$I''_G = I_{G_2} + 562,5\, \sigma\, (27,18 - 18,75)^2 = 105892,12\, \sigma$$

El momento de inercia de la sección dada, respecto al eje horizontal que pasa por G_1, será

$$I_G = I'_G + I''_G = 68393,53\,\sigma + 105892,12\,\sigma = 174285,65\,\sigma$$

El radio de giro, será

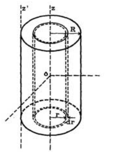
$$\rho = \sqrt{\frac{I_G}{m}} = \sqrt{\frac{174285,65\,\sigma}{900\,\sigma}} = \underline{\underline{193,65 \text{ cm.}}}$$

=.=.=.=.=.=.=

VI-15. Momento de inercia de un cilindro de revolución macizo, homogéneo, de radio, R, y masa, M, respecto a:
1°) El eje del cilindro.
2°) Una generatriz del cilindro.

****

1º) Descompongamos el cilindro en tubos de espesor dr , el volumen de uno cualquiera de éstos tubos, será :



$$dv = 2\,\pi\,r\,h\,dr$$

y su masa :

$$dm = \rho\,2\,\pi\,r\,h\,dr$$

luego :

$$I_z = \int dm\,r^2 = 2\,\pi\,h\,\rho \int_0^R r^3\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi\,h\,\rho\,R^4$$

La masa del cilindro , es :

$$M = \pi\,R^2 h\,\rho$$

nos queda :

$$I_z = \frac{1}{2}\,MR^2$$

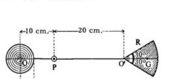
2º) Aplicando el teorema de Steiner

$$I_{z'} = I_z + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

=.=.=.=.=.=.=

VI-16. Calcular el momento de inercia del cuerpo de la figura respecto a un eje perpendicular al plano de la misma por el punto P. La figura de la derecha es un sector de un disco y la de la izquierda es una esfera; ambas estan unidas por una barra de peso despreciable. La masa del sector es M = 10 kg. y la de la esfera m = 4 kg. Los radios valen R = 20 cm y r = 5 cm.

El momento de inercia de la esfera respecto a un diámetro es:



$$I_d = \frac{2}{5}\, mr^2$$

El momento de inercia de la esfera respecto al eje que pasa por P y es perpendicular al plano de la figura, valdrá:

$$I'_P = \frac{2}{5} mr^2 + md^2 = m\left(\frac{2}{5} r^2 + d^2\right) = 440 \text{ kg cm}^2$$

El momento de inercia del sector de disco con respecto a O', es la sexta parte del momento de inercia del disco completo, de masa 6M, luego:

$$I_{O'} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,(6M)\,R^2 = \frac{1}{2}\,M\,R^2$$

Aplicando el teorema de Steiner, dos veces, tendremos:

$$I''_P = I_G + M\,\overline{PG}^2$$

$$I_{O'} = I_G + M\,\overline{O'G}^2$$

Restando miembro a miembro:

$$I''_P - I_{O'} = M(\overline{PG}^2 - \overline{O'G}^2)\,; \quad \text{ó sea} \quad I''_P = I_{O'} + M\,(\overline{PG}^2 - \overline{O'G}^2)$$

sabemos que $O'G = \frac{2}{3} R \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\operatorname{sen} 60}{\pi/3} = R\,\frac{\sqrt{3}}{\pi} \simeq 11\text{cm.}$ y $PG = 31\,\text{cm.}$

luego: $$I''_P = \frac{1}{2}\,10\cdot 400 + 10\,(31^2 - 11^2) = 10\cdot 400 \text{ kg cm}^2$$

El momento de inercia del cuerpo, será:

$$I_P = I'_P + I''_P = 10840 \text{ kg. cm}^2 = 1{,}084 \text{ kg m}^2$$

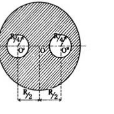
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VI-17. A un disco de radio R = 12 cm. y altura h = 4 cm. se le han hecho dos taladros, como se indica en la figura. Hallar el momento de inercia del cuerpo resultante con respecto al eje del disco. El disco es de cobre de densidad $\rho = 9$ gr/cm^3.

****

El momento de inercia del disco macizo, sería :

$$I'_o = \frac{1}{2}\,MR^2$$



Los momentos de inercia de los dos taladros, si fueran macizos, respecto a sus respectivos ejes, serían :

$$I_{o'} = I_{o''} = \frac{1}{2}\, m\, \frac{R^2}{16}$$

Apliquemos el teorema de Steiner para obtener el momento de inercia, de los taladros, respecto al eje del disco.

$$I_o'' = 2\left[\frac{1}{2}\, m\, \frac{R^2}{16} + m\frac{R^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{9}{16}\, m R^2$$

El momento de inercia del disco taladrado, será :

$$I_o = I_o' - I_o'' = \frac{1}{2} M R^2 - \frac{9}{16}\, m R^2 = \frac{R^2}{2}\left[M - \frac{9}{8}\, m\right]$$

Teniendo en cuenta que : $M = \pi R^2 h \rho$ y $m = \pi \frac{R^2}{16} h \rho$

nos quedará :

$$I_o = \frac{R^2}{2}\left[\pi R^2 h \rho - \frac{9}{128}\pi R^2 h \rho\right] = \frac{119}{256}\pi R^4 h \rho = 0{,}109 \text{ Kg. m}^2$$

=.=.=.=.=.=

VI-18. Dado un cono homogéneo de masa, M, y radio de la base, R, Calcular:

1.°) Momento de inercia del cono respecto a su eje
2.°) Radio de giro del cono respecto a su eje.

****

1º) Descompongamos el cono en tubos de radio r, altura z, y espesor dr ; estos tubos tendrán una masa :

$$dm = \rho\, 2\pi\, r\, z\, dr$$

por triángulos semejantes, obtenemos:

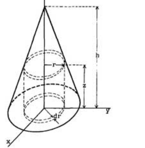
$$z = \frac{h}{R}(R - r)$$

El momento de inercia , será :

$$I_z = \int dm\, r^2 = \frac{2\pi\, \rho\, h}{R}\int_0^R r^3 (R-r)\, dr$$

$$= \frac{2\pi\, \rho\, h}{R}\left(\frac{R^5}{4} - \frac{R^5}{5}\right) =$$

$$= \frac{\pi R^4 h \rho}{10}$$



la masa del cono es : $M = \frac{1}{3}\pi R^2 h \rho$

por tanto : $\boxed{I_z = \frac{3}{10} M R^2}$

2º) El radio de giro, es :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{3}{10}}\, R$$

=.=.=.=.=.=

C A P I T U L O VII

MOVIMIENTO OSCILATORIO ARMONICO

VII-1. Un punto material está dotado de un movimiento armónico simple de amplitud $A = 1$ m. y $\omega = \pi$ rad/seg. Averiguar: 1°) Su período y frecuencia 2°) la ley del movimiento sabiendo que el origen de tiempos se cuenta cuando el móvil pasa por su posición media hacia el sentido positivo. 3°) Las leyes de la velocidad y aceleración; 4°) La elongación, velocidad y aceleración a los 1/6 de segundo de iniciarse el movimiento 5°) El tiempo mínimo necesario para que la elongación valga -0,5 m. 6°) La velocidad máxima que adquiere el móvil.

****

1º) El período valdrá: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$ seg.

y la frecuencia $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ oscilaciones/seg.

2º) La elongación viene dada por la ecuación $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$

como para $t = 0$ $x = 0$ quedará $\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

por tanto $x = A\,\mathrm{sen}\,\omega t \Rightarrow x = \mathrm{sen}\,\pi t$

3º) La velocidad y aceleración serán:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pi\cos\pi t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\pi^2 \mathrm{sen}\,\pi t = -\pi^2 x$$

4º) Para $t = 1/6$ seg., los valores de x, v y a serán respectivamente:

$$x = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ \text{m.}$$

$$v = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\pi\ \text{m/seg.}$$

$$a = -\pi^2 x = -\frac{\pi^2}{2}\ \text{m/seg}^2$$

5º) Hagamos $x = -0,5$ m., tendremos:

$$-0,5 = \operatorname{sen} \pi t \qquad \text{de donde} \qquad \pi t = \operatorname{arc\,sen}(-1/2) = \pi + \frac{\pi}{6}$$

despejando t

$$t = \frac{1}{\pi}\,\frac{7\pi}{6} = \frac{7}{6} \text{ seg.}$$

6º) La expresión $v = \pi \cos \pi t$ será máxima cuándo $\cos \pi t = \pm 1$

luego:

$$v_{max} = \pi \text{ m/seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-2. Un oscilador armónico lleva una velocidad de $v_1 = 2$ cm/s cuando su elongación es $x_1 = 6$ cm. y una velocidad de $v_2 = 1,5$ cm/s para una elongación $x_2 = 8$ cm. Calcular: 1º) Amplitud. 2º) Periodo. 3º) Aceleración máxima.

****

1º) Apliquemos la formula de la velocidad en función de la elongación

para $x_1 = 6$ cm. $v_1 = 2$ cm/s tendremos: $2 = \omega\sqrt{A^2 - 36}$

" $x_2 = 8$ cm. $v_2 = 1,5$ cm/s " : $1,5 = \omega\sqrt{A^2 - 64}$

elevando al cuadrado ambas expresiones y dividiendo miembro a miembro obtendremos:

$$\frac{4}{9/4} = \frac{A^2 - 36}{A^2 - 64} \qquad \text{de donde} \qquad A = 10 \text{ cm.}$$

2º) Sustituyendo el valor hallado

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{100-36}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 8\pi \text{ seg.}$$

3º) La aceleración es máxima para $x = A$, luego

$$a = -\omega^2 A = -\frac{10}{16} = -0,625 \text{ cm/s}^2$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-3. Un péndulo está constituido por una pequeña esfera de masa m suspendida con un hilo delgado de longitud L. Se le hace oscilar en un plano vertical. Cuando la esfera pasa por la posición de equilibrio, la cuerda experimenta una tensión igual al doble del peso de la esfera. ¿Cuál es el desplazamiento angular máximo desde la vertical?. Despreciese el peso de la cuerda y la resistencia del aire.

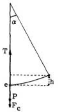
****

El punto más bajo es la posición de equilibrio en ella se verifica :

$$T = P + F_c$$

o sea :

$$2P = P + F_c \quad y \quad F_c = P$$



de donde

$$\frac{mv^2}{l} = mg \quad y \quad v = \sqrt{gl}$$

Apliquemos el principio de conservación de la energía mecánica a las posiciones 1 y 2 , tendremos

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2$$

luego :

$$mgh = \frac{1}{2} mgl$$

$$y \quad h = \frac{l}{2}$$

Para calcular α :

$$\cos\alpha = \frac{l - h}{l} = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \quad y \quad \boxed{\alpha = 60^o}$$

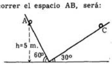
=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-4. Determinar el período de oscilación de una bola que se desliza sin rozamiento por el sistema formado por dos planos inclinados de ángulos 30° y 60°, en la forma que indica la figura. La altura, h, desde la cual se inicia el movimiento es de 5 m./g = 10 m/s²

****

El tiempo que tarda la bola en recorrer el espacio AB, será:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}}$$



siendo $a = g\,\text{sen}\,\alpha = 10\,\text{sen}60 = 5\sqrt{3}$

$$y \quad s_1 = \frac{h}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{5}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{luego} \quad t_1 = \sqrt{\frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{5\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ seg.}$$

la velocidad de la bola al llegar al punto C, valdrá:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5} = 10 \text{ m/s}$$

Al no existir perdidas de energía la bola llegará, en el plano inclinado 30º, hasta un punto C situado a h = 5m. sobre la horizontal. El tiempo que tardará en recorrer el espacio BC, será:

$$t_2 = \frac{v_2}{a'} = \frac{v_2}{g \operatorname{sen} 30} = \frac{10}{10 \frac{1}{2}} = 2 \text{ seg.}$$

analogamente los tiempos de los recorridos CB y BA serán respectivamente:

$$t'_2 = 2 \text{ seg.} \qquad \text{y} \qquad t'_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ seg.}$$

por tanto, el tiempo de una oscilación completa (período) valdrá:

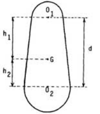
$$T = t_1 + t_2 + t'_2 + t'_1 = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 6{,}208 \text{ seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-5. Se suspende sucesivamente un sólido de dos ejes paralelos distantes entre sí d = 10 cm. obteniendose dos péndulos compuestos de distinto periodo. Las longitudes de los péndulos simples equivalentes son respectivamente l_1 = 3 cm. y l_2 = 8 cm. Calcular las distancias h_1 y h_2 de los dos ejes al centro de gravedad del sólido y el radio de giro ρ respecto a un eje paralelo a los primeros que pase por el c.de.g., sabiendo que éste se encuentra entre los dos ejes y el plano de los mismos.

****

Llamemos I_1, I_2 e I_G a los momentos de inercia del sólido con respecto a tres ejes paralelos que pasan respectivamente por O_1, O_2 y G'.



Las longitudes de los péndulos simples equivalentes , son :

$$l_1 = \frac{I_1}{m\,h_1} = 3$$

$$l_2 = \frac{I_2}{m\,h_2} = 8$$

Aplicando el teorema de Steiner, tendremos :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_G + m\,h_1^2 \\ I_2 &= I_G + m\,h_2^2 \end{aligned}\right\} \qquad I_1 - m\,h_1^2 = I_2 - m\,h_2^2$$

como $I_1 = 3\,m\,h_1$ e $I_2 = 8\,m\,h_2$

tendremos $\quad 3\,m\,h_1 - m\,h_1^2 = 8\,m\,h_2 - m\,h_2^2$

$$3\,h_1 - 8\,h_2 = h_1^2 - h_2^2 = (h_1 - h_2)(h_1 + h_2)$$

cómo $h_1 + h_2 = d = 10$ sustituyendo en la ecuación anterior

$$3\,h_1 - 8\,h_2 = 10\,(h_1 - h_2) \quad \text{o sea} \quad h_2 = \frac{7}{2}\,h_1$$

por tanto $$h_1 + \frac{7}{2}\,h_1 = 10 \qquad \begin{cases} h_1 = 20/9 \text{ cm.} \\ h_2 = 70/9 \text{ cm.} \end{cases}$$

El momento de inercia del solido con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad es :

$$I_G = I_1 - m\,h_1^2 = 3\,m\,h_1 - m\,h_1^2 = m\,(3\,h_1 - h_1^2)$$

y el radio de giro buscado es :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_G}{m}} = \sqrt{\frac{m\,(3\,h_1 - h_1^2)}{m}} = \sqrt{3\,h_1 - h_1^2} = \sqrt{\frac{140}{81}} = \underline{\underline{1,3 \text{ cm.}}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

VII-6. Un péndulo está constituido por una pequeña esfera de dimensiones que consideraremos despreciables, cuya masa es m = 200 g., suspendida de un hilo inextensible y sin peso apreciable, de 2 m. de largo.

1°) Calcular el período para pequeñas amplitudes

2°) Supongamos que en el momento de su maxima elongación la esfera se ha elevado 20 cm. por encima del plano horizontal que pasa por su posición de equilibrio. Calcular su velocidad, energía cinética y tensión del hilo cuando pase por la vertical.

3°) Supongamos que al pasar por la vertical el hilo encuentra un clavo O' situado 1 m. por debajo del punto de suspensión O y normal al plano de oscilación. Describir el movimiento ulterior de la esfera. Calcular la relación del las tensiones del hilo cuando el péndulo alcanza sus posiciones extremas.

4°) Calcular el período de este péndulo, tal como se describe en el apartado anterior, para pequeñas amplitudes.

****

1º) El período será:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{9,8}} = 2,8 \text{ seg.}$$

2º) Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica

$$mgh = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9,8\cdot 0,2} = 1,96 \text{ m/s.}$$

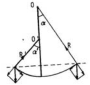
la energía cinética valdrá:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,0,2\cdot 1,96^2 = 0,392 \text{ julios}$$

y la tensión del hilo

$$T = P + F_c = mg + \frac{mv^2}{l} = 0,2\left(9,8 + \frac{1,96^2}{2}\right) = 2,35 \text{ Newton}$$

3º) Al no existir pérdida de energía la bolita se elevará, en el lado de la izquierda una altura vertical de 20 cm., igual a la que se elevaba antes de colocar el clavo. El radio del arco descrito será $1' = 1$ m.



Las tensiones del hilo en las posiciones extremas serán:

$$\left.\begin{aligned} R &= P\cos\alpha \\ R' &= P\cos\alpha' \end{aligned}\right\}$$

siendo $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1,8}{2} = 0,9 \\ \cos\alpha' = \dfrac{0,8}{1} = 0,8 \end{cases}$

luego $\dfrac{R}{R'} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \dfrac{9}{8}$

4º) El período de un péndulo de longitud $1' = 1$ m. vale:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,8}} = 2 \text{ seg.}$$

y el período del péndulo descrito en el apartado anterior será:

$$T'' = \frac{T}{4} + \frac{T'}{4} + \frac{T'}{4} + \frac{T}{4} = \frac{T}{2} + \frac{T'}{2} = 1,4 + 1 = 2,4 \text{ seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-7. Un punto material está sometido simultaneamente a los movimientos definidos por las ecuaciones:

$$x_1 = 5\cos\omega t$$

$$x_2 = 5\cos(\omega t + \pi/3)$$

Hallar el movimiento resultante del punto material.

****

El movimiento resultante será vibratorio armónico, su elongación será de la forma

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

siendo

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \sqrt{25+25+2.25\frac{1}{2}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

y

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + A_2 \operatorname{sen}\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} = \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}}{5+5.1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^0$$

El movimiento resultante será

$$x = 5\sqrt{3}\cos(\omega t + \pi/6)$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-8. Un cuerpo de M = 1 Kg. de masa está en reposo en C sobre una superficie horizontal sin rozamiento, unido a una pared vertical por medio de muelle de constante recuperadora 4 N/m. Una masa de m = 300 gr. que desliza sobre el plano horizontal hacia el primer cuerpo llega al punto A con una velocidad de 6 m/s. Sabiendo que en el tramo AB = a = = 8 m. el coeficiente de rozamiento es 0'1, que en el tramo BC no hay rozamiento y suponiendo que después del choque las dos masas quedan unidas, hallar la frecuencia y amplitud del movimiento armónico simple que describen. Tómese $g = 10\ m\cdot s^{-2}$

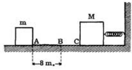
****

Apliquemos el teorema de las fuerzas vivas entre A y B, tendremos:

$$\frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = \mu mg\cdot a$$

de donde

$$V_B^2 = V_A^2 - 2\mu g a$$



o sea

$$V_B = \sqrt{36-2\cdot 0'1.10.8} = 2\sqrt{5}\ m/s$$

a partir de B no hay rozamiento, por tanto, $V_C = V_B = 2\sqrt{5}$ m/s

Apliquemos conservación de la cantidad de movimiento para calcular la velocidad común de ambas masas después del choque

$$mV_C = (M+m)V \qquad V = V_C\frac{m}{M+m} = 2\sqrt{5}\,\frac{300}{1300} = \frac{6}{13}\sqrt{5}\ m/s$$

Toda la energía cinética del sistema se transforma en el trabajo necesario para contraer el resorte.

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad x = V\sqrt{\frac{M+m}{K}} = 0'586\ m = 58'6\ cm.$$

que es la amplitud del movimiento armónico.

Como

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

la frecuencia será:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M+m}} = 0'27\ vibr/seg.$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-9. Por la garganta de una polea, cuya masa m puede considerarse concentrada en su periferia, pasa un hilo inextensible y sin masa. De uno de los extremos del hilo cuelga una masa M y el otro extremo del hilo está atado a un resorte vertical cuyo otro extremo está fijo en el suelo. Calcular el perido de las pequeñas oscilaciones de M.

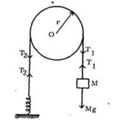
Datos: m = 800 gr.; M = 200 gr; $K = 16.10^5$ dinas.cm.

****

Cuando el sistema esté en reposo, la fuerza que actúa sobre el resorte el Mg y llamando x_o al alargamiento del resorte en ésta posición, tendremos

$$Mg = kx_o \quad (a)$$

desplacemos ligeramente, verticalmente hacia abajo, la masa M, tendremos



$$T_2 = k(x_o + x) \quad (b)$$

aislando la masa, M obtendremos

$$Mg - T_1 = Ma \quad (c)$$

aplicando a la polea el principio fundamental de la dinámica de rotación, tendremos :

$$T_1 R - T_2 R = I\alpha = mR^2 \frac{a}{R} = mRa$$

o sea $\quad T_1 - T_2 = ma \quad$ (d)

La solución del sistema formado por las ecuaciones (a), (b), (c) y (d) es :

$$a = -\frac{k}{m+M}x \qquad \text{o sea} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

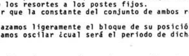
y el período de la masa M será :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10^3}{16.10^5}} = \frac{2\pi}{40} = 0,157 \text{ seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

VII-10. Dos resortes R_1 y R_2 de longitud natural 0,2 m. cada uno y de constantes recuperadoras K_1 = 1 Nw/m y K_2 = 3 Nw/m respectivamente, están enganchados por uno de sus extremos a un bloque que puede desplazarse, sin rozamiento, sobre una superficie horizontal. Los otros estremos de los resortes se unen a dos postes fijos situados a 0,1 m. de los extremos de los resortes, tal como indica la figura.

1º) Encontrar la posición de equilibrio del bloque cuando se hayan sujetado los resortes a los postes fijos.
2º) Demostrar que la constante del conjunto de ambos resortes vale 4 Nw/m.
3º) Si desplazamos ligeramente el bloque de su posición de equilibrio y lo dejamos oscilar ¿cual será el periodo de dicha oscilación?



****

1º) Al estirar ambos resortes para unirlos a los postes fijos, las fuerzas elasticas ejercidas sobre el bloque han de ser iguales, luego:

$$k_1x_1 = k_2x_2 \qquad \text{de donde} \qquad x_1 = 3x_2$$

además, se ha de verificar que $x_1 + x_2 = 0,1 + 0,1 = 0,2$

por tanto $\qquad x_1 = 0,15 \text{ m.} \qquad y \qquad x_2 = 0,05 \text{ m.}$

el bloque se encuentra situado a una distancia del poste de la izquierda:

$$d = 0,15 + 0,2 = 0,35 \text{ m.}$$

y a una distancia del poste de la derecha:

$$d' = 0,05 + 0,2 = 0,25 \text{ m.}$$

2º) Desplacemos el bloque una distancia x hacia la derecha de la posición de equilibrio, hallada anteriormente, tendremos:

$$F = F_1 - F_2 = k_1(0,15 + x) - k_2(0,05 - x) = kx$$

operando:

$$k_1 \cdot 0,15 + k_1x - k_2 \cdot 0,05 + k_2x = kx$$

como $\qquad k_1 \cdot 0,15 = k_2 0,05$

nos quedará $\qquad (k_1 + k_2)x = kx \qquad$ luego $\qquad k = k_1 + k_2 = 4 \text{ Nw/m.}$

3º) El período de las oscilaciones del sistema será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{4}} = \pi \cdot \sqrt{0,1} \simeq 1 \text{ seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-11. Una bala de 10 gramos que se mueve con una velocidad de 400 m/s se incrusta contra el bloque de la figura de 990 gramos. Después del choque el muelle llega a contraerse 20 cm., realizando un movimiento armónico simple si no hay rozamiento entre el bloque y el suelo. En estas condiciones, determinar: 1º) La constante recuperadora del muelle. 2º) El periodo de oscilación.

Si hay rozamiento entre el bloque y el suelo, siendo el coeficiente de rozamiento 0,12, determinar: 3º) La máxima contracción del muelle.

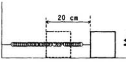
****

1º) Llamando v' a la velocidad del sistema bloque-bala inmediatamente después del impacto y aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento, tendremos:

$$m\,v = (M + m)\,v'$$

de donde:

$$v' = \frac{m\,v}{M+m} = \frac{10 \cdot 40000}{1000} = 400 \text{ cm/s} = 4 \text{m/s.}$$



la energía cinética del sistema bala-bloque se transforma en el trabajo necesario para contraer el resorte:

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}k \cdot x^2$$

de donde:

$$k = \frac{(M+m)v'^2}{x^2} = \frac{16}{4 \cdot 10^{-2}} = 400 \frac{Nw}{m}$$

2º) el período será:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{400}} = \frac{2\pi}{20} = 0,314 \text{ seg.}$$

3º) En este caso la energía cinética del sistema bala-bloque se transformará en el trabajo necesario para contraer el resorte más el trabajo contra las fuerzas de rozamiento:

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \mu(m+M)gx$$

o sea $200x^2 + 1,2x - 8 = 0$

la máxima contracción será: $x = 19,7$ cm.

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-12. Un punto material se mueve sometido a dos movimientos vibratorios armónicos simples perpendiculares, de ecuaciones: $\left.\begin{matrix} x = 3 \text{ sen } 5t \\ y = 4 \cos 5t \end{matrix}\right\}$ (unidades M.K.S)

Calcular la trayectoria descrita por el punto, el periodo del movimiento y la velocidad en el instante t = 0.

****

Para hallar la ecuación de la trayectoria, eliminaremos el parámetro t

$$\left.\begin{matrix} \text{sen } 5t = \frac{x}{3} \\ \cos 5t = \frac{y}{4} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} \text{sen}^2 5t = \frac{x^2}{9} \\ \cos^2 5t = \frac{y^2}{16} \end{matrix}\right\} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

la trayectoria, descrita por el móvil, es una elipse

Como $\omega = 5$, el periodo, será $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 0,4\pi$ seg.

La componente horizontal de la velocidad es

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 15 \cos 5t \qquad \text{para } t = 0 \qquad V_x = 15 \text{ m/s}$$

y la vertical

$$V_y = \frac{dy}{dx} = -20 \text{ sen } 5t \qquad \text{para } t = 0 \qquad V_y = 0$$

luego, la velocidad del móvil, es

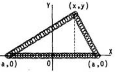
$$V = V_x = 15 \quad m/s$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VII-13. Dos muelles tienen una longitud $\underline{a}$ y una constante de rigidez K, estando fijos por sus extremos; a los puntos (-a,0) y (a,0) y unidos por el otro extremo. Calcular: 1º) La energía potencial de un desplazamiento del extremo común, hasta el punto (x,y). 2º) Hallar Fy para x = = 0.

****

1º) La longitud del resorte de la izquierda después del desplazamiento es:



$$l' = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}$$

y su aumento de longitud es:

$$\sqrt{(a+x)^2 + y^2} - a$$

análogamente, el aumento de longitud del resorte de la derecha es:

$$\sqrt{(a-x)^2 + y^2} - a$$

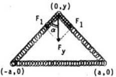
La energía potencial elastica, será:

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(a+x)^2+y^2} - a\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(a-x)^2+y^2} - a\right)^2$$

que podemos escribir también de la siguiente forma:

$$E_p = k\left[2a^2+x^2+y^2 - a\left(\sqrt{(a+x)^2+y^2} + \sqrt{(a-x)^2+y^2}\right)\right]$$

2º) La fuerza F_y es la resultante de las dos fuerzas recuperadoras de los muelles.



$$F_1 = k\left[\sqrt{a^2+y^2} - a\right]$$

luego:

$$F_y = 2F_1 \cos \qquad \text{siendo } \cos = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

de donde:

$$F_y = 2ky\frac{\sqrt{a^2+y^2} - a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

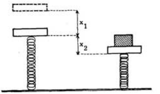
VII-14. Se deja caer un bloque de m = 10 Kg. desde una altura de h = 2 m. sobre el platillo de M = 10 Kg. de una báscula cuyo muelle tiene una constante elástica de K=8 Kg/cm. Suponiendo que a partir de la colisión bloque y platillo quedan firmemente adherido, encontrar:

1º) El desplazamiento máximo del platillo.
2º) Ley del movimiento del conjunto bloque-platillo
(Tengase en cuenta la aceleración de la gravedad $g = 10\ m/sg^2$)

****

1º) Inicialmente el muelle - debido al peso del platillo - está contraido una longitud x_1, que valdrá

$$K x_1 = Mg \Rightarrow x_1 = \frac{Mg}{K} = \frac{100}{8000} = \frac{1}{80}\ m = 1{,}25\ cm.$$



Cuando el bloque choca con el platillo lleva una velocidad

$$V_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ m/sg.$$

Aplicando conservación de la cantidad de movimiento del sistema bloque-platillo, obtenemos la velocidad de ambos después del choque

$$m\ v_1 = (m + M) v_2 \Rightarrow v_2 = $$

$$= \frac{m}{m+M} v_1 = \frac{10}{20} 2\sqrt{10} = \sqrt{10}\ m/sg.$$

Después del choque la energía mecánica se conserva. Si tenemos en cuenta que en el instante en que la compresión sea máxima la velocidad del sistema bloque-platillo es cero, tendremos.

$$\frac{1}{2} K x_1^2 + (m + M) g x_2 + \frac{1}{2}(m+M) v_2^2 = \frac{1}{2} K (x_1 + x_2)^2$$

o sea

$$200\, x_2 + 100 = 4000\, x_2^2 + 100\, x_2$$

$$40\, x_2^2 - x_2 - 1 = 0$$

de las dos soluciones solamente interesa la positiva $x_2 = 0{,}17\ m.$

2º) El movimiento del conjunto bloque-platillo será armónico simple y su período es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{20}{8000}} = \frac{\pi}{10}\ sg.$$

La posición de equilibrio cuando el bloque está sobre el platillo se obtendra igualando la fuerza del peso a la fuerza recuperadora del resorte

$$K x_o = (m+M) g \Rightarrow x_o = g \frac{m+M}{K} = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm.}$$

La amplitud es la elongación máxima contada desde la posición de equilibrio, luego

$$A = x_1 + x_2 - x_o = 1,25 + 17 - 2,5 = 15,75 \text{ cm.}$$

Si consideramos que $x = 0$ para $t = 0$, la ecuación del movimiento es

$$x = A \text{ sen } \omega t = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T} t = 15,75 \text{ sen } 20 \text{ t (cm.)}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO VIII

ELASTICIDAD

.III-1.El tirante de una armadura resiste una carga de P = 10000 Kg. El tirante está hecho con hierro redondo cuyo módulo de elasticidad es E = 20000 Kg/mm^2, tiene una longitud l = 1 m. Calcular el radio de la sección del tirante, sabiendo que el alargamiento es δ = 1'25 mm.

Si el tirante fuera de hierro cuadrado ¿cuál sería el lado del cuadrado?

****

Sabemos que $\frac{P}{A} = E\,\frac{\delta}{l}$

de donde

$$A = \frac{P}{E}\,\frac{l}{\delta} = \frac{10000}{20000}\,\frac{1000}{1'25} = 400 \ \text{mm}^2$$

cuando el tirante sea de hierro redondo

$$A = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{400}{\pi}} = 11'28 \ \text{m m.}$$

cuando el tirante sea de hierro cuadrado

$$A = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{A} = \sqrt{400} = 20 \ \text{m m.}$$

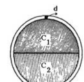
=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-2. Un anillo de hierro redondo de diametro d = 40 mm. debe sujetar, mediante un estirado en caliente, dos medios cilindros C_1 y C_2 uno sobre otro. El diámetro medio del anillo en frio vale antes del estirado d_1 = = 600 mm. y en caliente, después del estirado, d_2 = 600'4 mm. Módulo de Young E = 20000 Kg/mm^2. Se pide: a) Tensión específica. b) Presión ejercida por los semicilindros entre sí.

a) El alargamiento experimentado por el anillo, será:

$$\delta = \pi d_2 - \pi d_1 = \pi(d_2 - d_1) = 3,14\,(600,4 - 600) = 3,14 \cdot 0,4 = 1,256 \text{ mm.}$$

longitud inicial del anillo



$$l = \pi d_1 = 3,14 \cdot 600 = 1\cdot 884 \text{ mm.}$$

por tanto

$$f = \frac{F}{A} = E\,\frac{\delta}{l} = 20000\,\frac{1,256}{1\cdot 884} = 13'3 \text{ Kg/mm}^2$$

b) La sección transversal del anillo vale

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1600\pi}{4} = 400\pi = 1256 \text{ mm}^2$$

luego

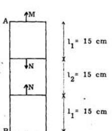
$$P = \frac{\delta \cdot A \cdot E}{l} = \frac{1'256 \cdot 1256 \cdot 20000}{1\cdot 884} = 16\cdot 704'8 \text{ Kg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-3. Determinar el alargamiento total de una barra de duraluminio AB cuya sección recta es 4 cm^2 y esta sometida a la acción de las fuerzas M = N = 800 Kg. ver Figura.

Dato. $E = 7\cdot 10^5$ Kg/cm^2

****



Sabemos que el alargamiento es $\delta = \frac{P \cdot l}{A \cdot E}$

luego

$$\delta_T = 2\cdot \frac{M \cdot l_1}{A \cdot E} + \frac{(M-N) l_2}{A \cdot E}$$

el término $\frac{(M-N) l_2}{A E} = 0$ al ser M = N por lo

que $\delta_T = 2\,\frac{M \cdot l}{A \cdot E} = \frac{(2)(800)(15)}{(4)(7\cdot 10^5)} = 0'057$ cm.

$\delta T = 0'057$ cm.

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-4. Una barra prismática de 60 cm. de longitud alarga 0'6 mm. bajo la acción de una fuerza extensora. Hallar el valor de la fuerza si el volumen de la barra es 16 cm^3.

****

Se que $\delta = \frac{P \cdot l}{A \cdot E}$

Quiero calcular el peso, para lo cual necesito el volumen

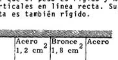
$$V = A.l \quad ; \quad A = \frac{V}{l} = \frac{16}{60} = 0'266 \text{ cm}^2$$

luego
$$0'06 = \frac{P \cdot 60}{0'266 \cdot 2'1 \cdot 10^6}$$

$$P = 532 \text{ Kg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-5.Calcular la fuerza en cada una de las barras verticales de la figura. Se impone que el peso es rígido y mantiene las conexiones de las tres barras verticales en línea recta. Supongan también que el anclaje en la parte alta es también rígido.



Datos:

$$E_1 = 2'1 \cdot 10^6$$
$$E_2 = 1'05 \cdot 10^6$$

****

Se que $\quad 2\,F_1 + F_2 = 2.500$

y que $\quad \delta = \frac{P \cdot l}{A \cdot E} \quad$ sí, igualando en las dos fuerzas

y tengo $\quad \frac{F_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{F_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2}$

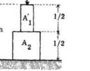
$$\frac{90\ F_1}{(1'2)(2'1 \cdot 10^6)} = \frac{90\ F_2}{(18)(1'05 \cdot 10^6)} \qquad 3F_1 = c/F_2$$

luego tengo

$$\left.\begin{array}{l} 2F_1 + F_2 = 2.500 \\ 3F_1 = 4F_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_1 = 909 \text{ Kg.} \\ F_2 = 682 \text{ Kg.} \end{array}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-6.Una pila de puente formada por dos trozos prismaticos de igual longitud está sometida en un extremo superior a una compresión P = = 300.000 Kg. Determinar el volumen de la fabrica si la altura del pilar son 36 cm., el peso por m³ 2000 Kg y la fatiga de compresión máxima admisible 10 Kg/cm². Comparar el volumen obtenido con el de un pilar prismático proyectado en analogas condiciones.



La parte de arriba soporta 300.000 Kg. y la inferior 300.000 + el peso de la superior

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad ; \quad A = \frac{P}{\sigma} = \frac{300.000}{10} =$$

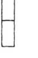
$$= 30.000 \text{ cm}^2 <> \underline{3 \text{ m}^2}$$

el peso de la parte superior es:

$$W = 3 \cdot \frac{36}{2} \cdot 2000 = 108 \cdot 000 \text{ Kg.}$$

$$A_2 = \frac{P}{\sigma} = \frac{300 \cdot 000 + 108 \cdot 000}{10} = 40 \cdot 800 \text{ cm}^2 <> \underline{4'08 \text{ m}^2}$$

$$V = 3 \cdot \frac{36}{2} + 4'08 \cdot \frac{36}{2} = \underline{127'4 \text{ m}^3}$$



El área sería

$$A = \frac{P}{\sigma} = 3. \text{ m}^2$$

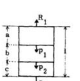
y el volumen $V = 3 \cdot 36 = \underline{108 \text{ m}^3}$

luego es menor.

=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-7. Una barra prismatica con los extremos empotrados está cargada ascialmente en dos secciones intermedios con fuerzas P_1 y P_2. Determinar las reacciones R_1 y R_2 cuando a = 0'3·1, b = 0'31 y $p_1 = 2p_2 = 500$ Kg.

****



$$P_1 + P_2 = R_1 + R_2$$

Igualo alargamientos y acortamientos

$$\underbrace{\frac{R_2 \cdot C}{A \cdot E} + \frac{R_2 \cdot (b + C)}{A \cdot E}}_{\text{Acortamiento total}} = \underbrace{\frac{R_1 \cdot a}{A \cdot E} + \frac{R_1 (a + b)}{A \cdot E}}_{\text{Alargamiento total}}$$

queda

$$\left. \begin{array}{r} P_1 + P_2 = R_1 + R_2 \\ R_2(b + 2C) = R_1(b + 2a) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 500 + 250 = R_1 + R_2 \\ R_2(0'3 \cdot 1 + 2 \cdot 0'4 \cdot 1) = R_1 \ (0'3 \cdot 1 + 2 \cdot 0'3 \cdot 1) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{r} 750 = R_1 + R_2 \\ R_2 \ 1'1 \cdot 1 = R_1 + 0'9 \cdot 1 \end{array} \right\} R_1 = R_2 \frac{1'1}{0'9} \quad \text{sustituyo y tengo.}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_2 = 337'5 \text{ Kg.} \\ R_1 = 412'5 \text{ Kg.} \end{array}\right\} \quad R_1 + R_2 = 750 \text{ Kg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-8. Un alambre de cobre, de radio r = 0'25 mm., sufre un alargamiento δ = 2 mm. cuando se carga con un peso P = 600 gr. y una torsión de θ = 1 radián cuando se aplica un par de M = 650 dinas - cm. en el extremo libre ¿Cuál es el coeficiente de Poisson para el cobre?

****

La relación que liga el módulo de Young, E, el módulo de rigidez, G, y el coeficiente de Poisson σ, es la siguiente: $G = \dfrac{E}{2(1+\sigma)}$

de donde:

$$\sigma = \frac{E}{2G} - 1$$

Pero $\quad E = \dfrac{P\cdot l}{A\cdot \delta} \quad$ y $\quad G = \dfrac{2\,l\,M}{\pi r^4 \theta}$

luego

$$\sigma = \frac{Pl/_{A\cdot\delta}}{\dfrac{2l\,M}{\pi r^4\theta}} - 1$$

teniendo en cuenta que $A = \pi r^2$ y simplificando, nos quedará

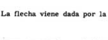
$$\sigma = \frac{P r^2 \theta}{2 M \delta} - 1 = \frac{600\cdot 980\cdot 625\cdot 10^{-6}\cdot 1}{2\cdot 650\cdot 2\cdot 10^{-1}} - 1 = 1,41 - 1 = 0,41$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-9. Una barra de acero de sección rectangular se encuentra empotrada en la pared. La longitud de la barra es l = 1 m. y las dimensiones de la sección transversal a = 20 mm. y b = 8 mm. Calcular el desplazamiento que experimenta el extremo libre de la barra cuando se coloca en dicho extremo una carga de F = 50 Kg. Módulo de Young del acero E = 20000 Kg/mm^2.

****

La flecha viene dada por la expresión: $f = \dfrac{F l^3}{3 E I}$



siendo I el momento de inercia geométrico de la sección recta de la barra respecto a la fibra neutra.

El momento de inercia de la sección rectangular, en este caso, va

$$I = \frac{a^3 b}{12}$$

por tanto

$$f = \frac{4 F l^3}{E a^3 b} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 1000^3}{20 \cdot 000 \cdot 20^3 \cdot 8} = 15'6 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=

VIII-10. Un pendulo de torsión está formado por un alambre, de l = 40 cm. de longitud y un diametro d = 1 mm., que lleva en su extremo inferior un disco metálico homogeneo de masa m = 500 gr. y radio r = 8 cm. Se le aplica al disco un par de M = 3Nw.m y gira un ángulo $\theta = 10°$.

Se pide: 1º) Módulo de rigidez del alambre 2º) Periodo de las oscilaciones del disco.

****

1º) El ángulo que gira el disco es proporcional al par aplicado, o sea

$$M = K \cdot \theta$$

y K depende de las dimensiones del alambre y del módulo de rigidez del material.

$$K = \frac{\pi r^4}{2l} G \Rightarrow G = \frac{2 l K}{\pi r^4}$$

o sea

$$G = \frac{2 l M}{\pi r^4 \theta} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 3000}{\pi \cdot (0'5^4)(\pi/18)} = 7 \cdot 10^7 \ \text{N/mm}^2$$

2º) El periodo de las oscilaciones del disco, será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\, 0'5 \cdot 0'08^2}{\frac{3 \cdot 18}{\pi}}} = 0'85 \text{ seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.

CAPITULO IX

MECANICA DE FLUIDOS

IX-1. Una esferita de acero de r = 3 mm. parte del reposo y cae en un depósito de glicerina. 1º) Cuál es la velocidad límite de la esferita. 2º) Cuál será la aceleración de la esferita en el instante en que su velocidad sea la mitad de su velocidad límite.

Datos: Densidad del acero $\rho_1 = 8$ gr/cm^3; densidad de la glicerina $\rho_2 = 1{,}3$ gr/cm^3; coeficiente de viscosidad de la glicerina $\eta = 830$ cp.

****

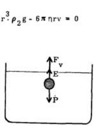
1º) Cuando la esferita alcanza su velocidad límite, la suma de las fuerzas que obran sobre ella ha de ser cero.

$$P - E - F_v = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g - 6\pi\eta r v = 0$$

de donde

$$v = \frac{\frac{4}{3} r^2 g(\rho_1 - \rho_2)}{6\eta} =$$

$$= \frac{2}{9} g \cdot \frac{r^2(\rho_1 - \rho)}{\eta}$$



sustituyendo valores

$$v = \frac{2}{9}\ 980 \cdot \frac{0'3^2(8 - 1'3)}{8'3} = 15'58 \text{ cm/seg.}$$

2º) Aplicando el segundo principio fundamental de la dinámica, tendremos

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2) - 6\pi\eta r v' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1\ a$$

de donde

$$a = \frac{\frac{4}{3}r^2 g(\rho_1 - \rho_2) - 6\eta v'}{\frac{4}{3}r^2 \rho_1} = \frac{4r^2 g(\rho_1 - \rho_2) - 18\eta v'}{4\rho_1 r^2}$$

teniendo en cuenta $v = \frac{v'}{2} = 7'79$ cm/seg.

$$a = \frac{4 \times 0'3^2 \times 980(8-1'3) - 18 \times 8'3 \times 7'79}{4 \times 8 \times 0'3^2} = 4'04 \ m \cdot s^{-2}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-2. Desde un punto situado a una altura de 10 m. sobre la superficie de un estanque lleno de agua y de profundidad 5 m. se deja caer una esferita de 0,2 cm. de radio.

a) La esferita es de hierro de densidad 7,5. Calcular: 1º) Lo que tarda en llegar al fondo del estanque. 2º) La energía cinética con que llega al fondo.

b) La esferita es de madera de densidad 0,3. Calcular: 1º) La profundidad hasta la que llega a hundirse en el estanque. 2º) La velocidad con que emerge a la superficie. Se prescinde en todo el problema de las fuerzas de rozamiento.

****

La velocidad con que la bolita llega a la superficie del agua en los dos casos , es:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 10} = 14 \ m \cdot s^{-1}$$

a) Apliquemos el principio fundamental de la mecánica a la esferita

$$P - E = ma_1 \Rightarrow \rho_c \cdot V \cdot g - \rho_a \cdot V \cdot g = \rho_c V a_1$$

de donde $a_1 = g\,\frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c} = 9,8\ \frac{7,5 - 1}{7,5} = 8,49 \ m/s^2$

como $e = vt + \frac{1}{2}a_1 t^2 \Rightarrow t = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2a_1 e}}{a_1}$

o sea $t = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 84,9}}{8,49} = \begin{cases} 0,32 \text{ seg.} \\ \text{solución imposible} \end{cases}$

la velocidad al llegar al fondo es

$$v_f = \sqrt{v^2 + 2a_1 e} = \sqrt{196 + 84,9} = 16,76 \ m \cdot s^{-1}$$

y la masa de la esferita

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e = 0,251 \text{ gr.} = 2,51\cdot10^{-4} \text{ Kg.}$$

de donde

$$E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} 2,51\cdot10^{-4}\cdot 280,9 = 3,52\cdot10^{-2} \text{ julios}$$

b) En este caso la aceleración será

$$a_2 = g \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c} = 9,8 \frac{0,3 - 1}{0,3} = -22,8 \text{ m/s}^2$$

En el punto mas bajo de su trayectoria la velocidad de la esferita será $v = 0$, luego

$$v^2 + 2a_2 x = 0 \Rightarrow x = \frac{v^2}{2a_2} = \frac{196}{2\cdot 22,8} = 4,29 \text{ m.}$$

la velocidad con que sale a la superficie es

$$v = \sqrt{2a_2 x} = \sqrt{196} = 14 \text{ m/s.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-3. El elevador hidráulico de una estación de servicio posee, entre otras, las siguientes características: Diámetro del cilindro elevador D = 35 cm; altura máxima que puede alcanzar h = 1,5 m.; peso del cilindro y plataforma $P = 1,5$ Tm.; sección de la tubería de la bomba de compresión $S = 8$ cm^2.; potencia nominal del motor P = 10 C.V.; pérdidas por rozamiento $\mu = 30\%$. Se pide:

1º) Tiempo que se tardará en elevar un automóvil de 650Kg.
2º) Fuerza que soportará la válvula del circuito de la bomba una vez izado el vehículo.
3º) Energía eléctrica consumida en Kw-h. en la operación de elevación.

****

1º) La potencia útil del motor es

$$P_u = 10 - \frac{30}{100} 10 = 7 \text{ C.V} = 7\cdot 75 \text{ Kgm.} = 525 \text{ Kgm.}$$

como $\quad P_u = \frac{T}{t} \quad$ y $\quad T = (p + p_a)h$

$$t = \frac{T}{P_u} = \frac{(1500 + 650)\,1,5}{525} = \frac{2150\cdot 1,5}{5,25} = 6,14 \text{ seg.}$$

2º) Como el elevador es una prensa hidráulica $\frac{f}{s} = \frac{p + p_a}{S}$

o sea $\quad f = (p + p_a)\frac{s}{S} = 2150 \dfrac{8}{\frac{\pi\cdot 35^2}{4}} = 17,9 \text{ Kg.}$

3º) La potencia consumida es

$$P_T = 10 \text{ C.V} = 7355 \text{ watios} = 7,355 \text{ Kw.}$$

y la energía consumida en 6,14 seg. será

$$W = P_T \cdot t = 7,355 \cdot \frac{6,14}{3600} = 0,012 \text{ Kw.h.}$$

=.=.=.=.=.=.=

IX-4. Sobre una boya cilíndrica de 0,20 m^2 de base y P = 200 kg. está situado un cuerpo de P' = 40 Kg., flotando el conjunto en el mar. Si el cuerpo cae al mar. a) demostrar que la boya realiza un movimiento armónico simple; b) ¿cuál es la amplitud de dicho movimiento?; c) ¿cuál es el periodo del mismo? Tómese g = 10 m/s^2 y ρ = 1 gr./cm^3. Se supone que el movimiento de la boya es vertical y paralelo a su generatriz.

****

a) Sea h_1 la altura de la parte sumergida de la boya cuando encima de ella está el cuerpo de 40 Kg ; h_2, la altura de la parte sumergida si no hubiese nada encima de la boya. Al quitar el cuerpo la boya empezará a subir y en una posición cualquiera la boya estará sumergida una altura $h_2 + x$. La fuerza resultante sobre ella en esta posición será

$$F = P - E = S \cdot h_2 \rho g - S(h_2 + x)\rho g = - S\rho g\, x = - k\, x$$

y por tanto el movimiento de la boya es armónico simple.

b) La amplitud del movimiento es $A = h_1 - h_2$

como $P + P' = S\, h_1 \rho g \Rightarrow h_1 = \dfrac{P + P'}{S\rho\, g} = 1,4 \text{ m.}$

y $P = S\, h_2 \rho g \Rightarrow h_2 = \dfrac{P}{S\rho g} = 1 \text{ m.}$

tendremos $A = 1,4 - 1 = 0,4 \text{ m.}$

c) Como $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y $m\,\omega^2 = k \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

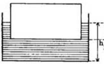
siendo, en este caso, $k = S\rho g$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{200}{0,20 \times 1000 \times 9,8}} \simeq 2 \text{ segundos.}$$

=.=.=.=.=.=.=

IX-5. Un bloque rectangular mide 100 x 100 cm. en planta y 50 cm. de altura y pesa 150 Kg. Está metido dentro de un recipiente rectangular que mide 110 x 110 cm. en planta y tiene 50 cm. de profundidad. En la ranura que queda entre el bloque y el hueco se introducen 100 litros de agua. ¿Qué altura alcanzará el agua sobre el fondo del recipiente?

****



El volumen del bloque es $V = 0,5\ m^3$ y su peso 150 Kg, su densidad será $\rho = 300\ Kg/m^3$ resultando menor que la densidad del agua, por tanto el bloque flotará.

Igualando el peso de bloque al empuje, tendremos

$$150 = 1000\ V_s = 1000 \cdot 1 \cdot h_1$$

luego $h_1 = 0'15$ m.

el volumen ocupado por los 100 litros de agua será:

$$1'21\ h_2 - 1 \cdot h_1 = 0'1$$

$$h_2 = \frac{0'26}{1'21} = 0'21\ m.$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-6. Un depósito rectangular está dividido en dos mitades por una pared vertical AB que mide 3 m. de altura y 3 m. de anchura. A un lado de la pared el agua alcanza 2 m. de altura y al otro lado 1 m. Se pide.

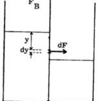
1º) Cuanto vale el empuje sufrido por la pared de separación.

2º) Si esta pared puede girar en torno a un eje horizontal situado en su base A, que fuerza habra que ejercer sobre ella en su extremo superior B para impedir que se mueva.

****

Tomemos un elemento de superficie de la pared AB que esté situado a una profundidad y con respecto al nivel del agua que ocupa la mitad de la izquierda. La fuerza que actúa sobre este elemento de pared será

$$dF = p\,ds = \rho g y \cdot a\ dy$$



El empuje sobre ese lado de la pared valdrá.

$$F = \rho g a \int_0^2 y\ dy = 6000\ Kg.$$

Análogamente la fuerza que ejerce sobre la pared el agua contendida en la parte derecha valdrá

$$F' = \rho g\, a \int_0^1 y\, dy = 1500 \text{ Kg}$$

El empuje resultante es

$$F_R = 6000 - 1500 = 4500 \text{ Kg}$$

2º) El momento de la fuerza elemental, dF, con respecto al eje proyectado en A será

$$dH = dF\,(2 - y) = \rho g\, a\,(2 - y)y\, dy$$

el momento resultante valdrá

$$M' = \rho g\, a \int_0^2 (2 - y)y\, dy = 4000 \text{ Kg m}$$

análogamente, el momento resultante debido a las fuerzas de presión que actuan en la parte derecha de la pared valdrá

$$M' = \rho g\, a \int_0^1 (1-y)\, y\, dy = 500 \text{ Kg. m}$$

Igualando momentos:

$$3F_B = M - M'$$

$$F_B = \frac{3500}{3} = 1.166 \text{ Kg.}$$

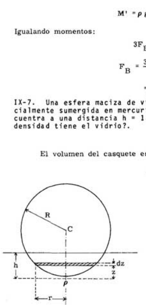
=.=.=.=.=.=.=.=

IX-7. Una esfera maciza de vidrio de radio R = 3 cm. se encuentra parcialmente sumergida en mercurio. El punto inferior de la esfera se encuentra a una distancia h = 1,5 cm. de la superficie del mercurio. ¿Qué densidad tiene el vidrio?.

****

El volumen del casquete esferico sumergido, será

$$V = \int_o^h \pi r^2 dz = \int_o^h (2Rz - z^2) dz = \pi\left[Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right] = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$$



Aplicando el principio de Arquímedes, tendremos:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)\rho'$$

de donde

$$\rho = \frac{\frac{h^3}{3}(3R - h)\rho'}{\frac{4}{3}R^3} = \frac{h^2(3R - h)\rho'}{4R^3}$$

Sustituyendo valores y tomando $\rho' = 13'6$, quedará:

$$\rho = \frac{2'25(9-1'5)13'6}{108} = 2'12 \text{ gr/cm}^3$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-8. Un tubo cilindrico de 40 cm. de altura, 8 cm. de diametro exterior y 4 cm. de diametro interior provisto de un émbolo de peso 96 gr. susceptible de desplazarse sin rozamiento por el interior del cilindro se introduce verticalmente en un depósito que contiene agua y encima una capa de aceite de 10 cm. Se desea que el émbolo permanezca en la parte inferior del tubo (cual si fuera un tapón). Se pide:

1º) Hasta que profundidad contada a partir de la superficie superior del aceite hay que introducir el extremo inferior del tubo.

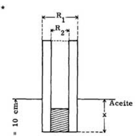
2º) Cuál debe ser el peso del tubo para que esté en equilibrio en estas condiciones.

3º) Qué volumen de agua habría que echar en el tubo para que el embolo permaneciese en equilibrio en la parte inferior del mismo si dicha parte está 20 cm. por debajo de la superficie superior del aceite?.

4º) ¿Qué fuerza vertical es precisoaplicar a la parte superior del tubo para que este permanezca en equilibrio cuando su extremo inferior está 20 cm. por debajo de la superficie superior del aceite.

Peso especifico del aceite 850 Kg/m^3; Peso especifico del agua 1000 Kg/m^3.

****



1º) Para que el embolo permanezca en la posición pedida su peso será igual a la fuerza de presión que jerce el liquido sobre el fondo del depósito, o sea $96 = \rho' g \, x \, \pi R_2^2$ de donde

$$x = \frac{96}{0'85 . 4 \pi} = 8'98 \text{ cm.}$$

el extremo inferior del tubo está en el aceite 8,98 cm por debajo de la superficie del mismo.

b) En estas condiciones el empuje sobre el tubo será:

$$E = \pi (R_1^2 - R_2^2) \cdot 8'98 \cdot 0'85 = 288 \text{ gr}$$

luego el peso del tubo ha de ser $P = 288$ gr.

c) En este caso hay que igualar la suma del peso del émbolo y el agua que se echa en el tubo a la fuerza que la presión de los líquidos ejerce sobre el fondo del émbolo, o sea

$$96 + V\rho g = \pi R_2^2 (0'85 \cdot 10 + 10) \qquad \text{siendo} \quad \rho g = 1 \text{ gr/cm}^3$$

por tanto $V = 4\pi \cdot 18'5 - 96 = 232'36 - 96 = 136'36 \text{ cm}^3$ de agua

d) El empuje sobre el tubo será:

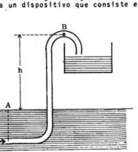
$$E = \pi(R_1^2 - R_2^2)\, 10 \cdot 0'85 + \pi(R_1^2 - R_2^2)\, 10 = 12\pi \cdot 18'5 = 697,08 \text{ gr.}$$

la fuerza que tendremos que aplicar será:

$$F = E - P = 697'08 - 287'61 = 409'47 \text{ gr.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-9. Para cargar de agua en marcha el ténder de una locomotora se utiliza un dispositivo que consiste en un tubo vertical acodado en ángulo recto que se sumerge por su parte horizontal inferior en un foso con agua, ascendiendo esta por el tubo a consecuencia de la velocidad relativa.



La altura del tubo es h = 3 m. y su sección transversal S = 400 cm^2. Se supone que un 20% de la energía del agua se pierde al ascender por dicho tubo a consecuencia de la fricción y cambios de dirección. Se pide:

a) Velocidad mínima del tren en Km/h. para que se cargue de agua el ténder.

b) Longitud, l, que ha de tener el foso para que, con una velocidad de 72 Km/h., del tren, se carguen en el ténder V = 16 m^3 de agua.

****

Si llamamos V_A a la velocidad del tren, la energía, por unidad de masa, del agua que entra por el orificio inferior del tubo será: $\dfrac{V_A^2}{2g}$

Para cargar el ténder bastará con que el agua llegue a B, aplicando Bernoulli nos quedará

$$\frac{80}{100} \cdot \frac{V_A^2}{2g} = h$$

de donde

$$V_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 3}{0,8}} = 8'6 \text{ m/s} \simeq 31 \text{ Km/h.}$$

2º) Al ser la velocidad del tren mayor que la mínima calculada en el apartado anterior, el agua llevará en B una velocidad V_B. En este caso tendremos

$$\frac{80}{100}\,\frac{V_A^2}{2g} = h + \frac{V_B^2}{2g} \qquad \text{siendo} \qquad V_A = 20 \text{ m/s}$$

luego $$V_B = \sqrt{0{,}8V_A^2 - 2\,g\,h}$$

el tiempo que tarda el tren en recorrer el foso es el mismo que tarda en cargarse 16 m^3 de agua en el ténder, por consiguiente,

$$t = \frac{l}{V_A} = \frac{V}{S\cdot V_B}$$

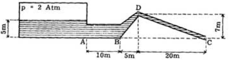
de donde

$$l = \frac{V\cdot V_A}{S\cdot V_B} = \frac{16\cdot 20}{0{,}04\,\sqrt{0{,}8\cdot 20^2 - 2\cdot 9{,}8\cdot 3}} = 496 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-10. Las características de una conducción de agua se indican en croquis. El agua del interior del depósito está sometida a una presión de 2 atmósferas. La presión exterior se supone de 1 atmosfera. (supóngase 1 At = 1 Kg/cm^2). El depósito se supondrá suficientemente grande para que su nivel se mantenga constante durante el tiempo que circula el agua por la tubería. Los tuberías son circulares. Los tramos AB y BC tienen distinto diámetro de AB = 40 cm. Suponiendo que el agua se comporta como un fluido ideal, y despreciando las perdidas de carga, calcular:

a) El diámetro del tramo BC, para que el caudal sea de 1 m^3/seg.
b) El punto (ó puntos) de la tubería donde la presión es menor que la atmosférica, y valor de la presión mínima; representar los sobre el gráfico.
c) El punto (ó puntos) de la tubería donde la presión es mayor que la atmosférica, y valor de la presión ¿mínima?; representarlos sobre el gráfico.



****

a) La velocidad del agua, a la salida de la conducción, podemos calcularla aplicando el teorema de Bernoulli a lo largo de una linea de corriente que una un punto de la superficie del depósito con un punto de la sección de salida, C. Tendremos

$$P + \rho g h = p_o + \frac{1}{2}\rho v_c^2 \,;$$

de donde

$$v_c = \sqrt{\frac{2\left[(p-p_o) + \rho g h\right]}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\left[980\cdot 10^3 + 980\cdot 500\right]}{1}} = 10^2\sqrt{294} =$$

$$= 1700 \text{ cm/s} = 17 \text{ m/s}$$

Como $$C = S_c \cdot V_c = \pi \frac{d_c^2}{4} V_c$$

tendremos $$d_c = \sqrt{\frac{4C}{\pi V_c}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^6}{1700 \pi}} = 27'3 \text{ cm.}$$

b) y c) Calculemos la velocidad en el tramo AB aplicando el principio de continuidad

$$S_A \cdot V_A = S_c V_c \qquad \text{ó} \qquad d_A^2 \cdot V_c = d_c^2 \cdot V_A$$

de donde $$V_A = V_c \frac{d_c^2}{d_A^2} = 1700 \; \frac{7493}{1600} \; = 796 \text{ cm/s}$$

Apliquemos el teorema de Bernoulli entre un punto cualquiera del tramo AB y de un punto de la sección de salida, tendremos:

$$p_A + \frac{1}{2} \rho V_A^2 = p_c + \frac{1}{2} \rho V_c^2 \qquad p_c = p_o = \text{ presión atmosferica}$$

como $\frac{1}{2} \rho V_A^2 < \frac{1}{2} \rho V_c^2$ p_A ha de ser mayor que la presión atmosférica todos los puntos del tramo AB están a una presión mayor que la atmosférica el valor de la presión en estos puntos será

$$p_A = p_c + \frac{1}{2} \rho (V_c^2 - V_A^2) = 1 + 2 = 3 \underline{\text{ At.}}$$

Apliquemos Bernouilli entre un punto cualquiera, X, del tramo BCD y un punto de la sección de salida.

$$p_x + \rho g h + \frac{1}{2} \rho V_x^2 = p_o + \frac{1}{2} \rho V_c^2$$

por el principio de continuidad $V_x = V_c$, y de la ecuación anterior obtendremos

$$p_x = p_o - \rho g h$$

luego en todos los puntos del conducto

$$p_x < p_o$$

Cuanto mayor sea h, menor será el valor de p_x, luego la presión es mínima cuando h = 7 m.

$$p_x = (980 \cdot 10^3 - 980 \cdot 700) \text{ barias} = 0,3 \text{ At.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

de donde

$$V_c = \sqrt{2g(H-h)} = \sqrt{2 \cdot 9,8(12-1,2)} = 14,5\, m/seg. = 1450\ cm/seg.$$

aplicando el principio de continuidad

$$S_c \cdot V_c = S_B \cdot V_B$$

obtenemos $$V_B = V_c \frac{S_c}{S_B} = 1450 \frac{225}{450} = \underline{725\ cm/seg.}$$

el caudal será

$$Q = S_c \cdot V_c = 225 \cdot 1450 = 326250\ cm^3/seg = \underline{326,25\ lit \cdot /seg.}$$

Ahora, apliquemos el teorema de Bernonilli entre P y un punto del orificio de salida C, nos quedará

$$P + \frac{1}{2}\rho V_B^2 = p_o + \frac{1}{2}\rho V_c^2$$

de donde

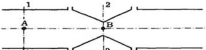
$$P = p_o + \frac{1}{2}\rho(V_c^2 - V_B^2) = 980 \cdot 1033 + \frac{1}{2}(1450^2 - 725^2) = 1 \cdot 880 \cdot 777,5\ dinas/cm^2 =$$

$$= 1,8\ At.$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-13. En una tubería horizontal de diámetro D = 0,20 m, en la que circula agua, se intercala un dispositivo, como el indicado en la figura, que es un doble como truncado de revolución, cuya sección común más estrecha tiene un diámetro d = 0,10 metros. Mediante dos manómetros situados, respectivamente, en la sección transversal 1.1 de la tubería y 2.2 del estrechamiento, se registran las presiones correspondientes, que son: $P_A = 1,6\ Kg/cm^2$ y $P_B = 0,10\ Kg/cm^2$.

Se pide el caudal, en litros por segundo, que circula por la tubería, siendo el peso específico del agua 1000 Kg/m^3



****

Aplicando el teorema de Bernoulli

$$P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2$$

y la ecuación de continuidad

$$S_A V_A = S_B V_B \qquad \text{o sea} \qquad \frac{\pi D^2}{4} V_A = \frac{\pi d^2}{4} V_B$$

de donde
$$V_B = \frac{D^2}{d^2} V_A$$

sustituyendo en la primera ecuación y operando, obtenemos

$$V_A = d^2 \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{(D^4 - d^4)}}$$

y

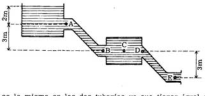
$$Q = S_A V_A = \frac{\pi D^2}{4} d^2 \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho (D^4 - d^4)}} = 139,14 \text{ l/seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-14. Las dos tuberias de la figura tienen igual diámetro. El depósito intermedio está cerrado herméticamente. El agua sale libremente por el extremo inferior. Se pide:

Calcular las presiones en A, B, C, D y E. Se despreciaran los rozamientos. Tomese 1 At = 1 Kg/cm^2

****



La velocidad es la misma en las dos tuberias ya que tienen igual diámetro. Suponiendo la presión atmosferica normal, tendremos que

$$p_E = 1 \text{ At.}$$

Aplicando Bernoulli entre D y E, quedará

$$p_D + \rho g h = p_E$$

de donde $\quad p_D = p_B = p_E - \rho g h = 1 - 0,3 = 0,7 \text{ At.}$

análogamente $\quad p_A = p_B - g h = 0,7 - 0,3 = 0,4 \text{ At.}$

la velocidad en C es practicamente cero, apliquemos Bernoulli entre un punto de la superficie libre y el punto C, quedará

$$p_o + \rho g h = p_c \qquad \text{siendo} \qquad h = 5 \text{ m.}$$

luego

$$p_c = 1 + 0,5 = 1,5 \text{ At.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

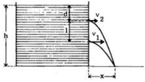
IX-15. Un recipiente abierto de paredes verticales está constantemente lleno de agua hasta una altura h = 1,80 m. En una misma vertical de la pared hay dos orificios que distan entre si l = 40 cm. por los que sale agua. Calcular la distancia d del orificio superior a la superficie libre del agua, sabiendo que los dos chorros se cortan en un mismo punto del plano horizontal que pasa por el fondo del recipiente.

****

Apliquemos la formula de Torricelli para calcular la velocidad de salida del agua por cada uno de los orificios

$$v_1 = \sqrt{2g(l + d)}$$

$$v_2 = \sqrt{2gd}$$



las ecuaciones paramétricas del movimiento parabólico descrito por el agua que sale por el orificio inferior son:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_1 t_1 \\ y &= \frac{1}{2} g t_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{siendo} \quad y = h - d - l$$

luego $$x = \sqrt{2g(l + d)}\sqrt{\frac{2\,g}{g}} = 2\sqrt{(l + d)(h - d - l)}$$

operando análogamente con el orificio superior

$$\left.\begin{aligned} x &= v_2 t_2 \\ y &= \frac{1}{2} g t_2^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{siendo} \quad y = h - d$$

luego $$x = \sqrt{2gd}\sqrt{\frac{2(h - d)}{g}} = 2\sqrt{d(h - d)}$$

igualando ambas expresiones, quedará

$$(l + d)(h - d - l) = d(h - d)$$

o sea $$lh - ld - l^2 + \cancel{dh} - \cancel{d^2} - d\,l = \cancel{dh} - \cancel{d^2}$$

y $$d = \frac{h - l}{2} = \frac{180 - 40}{2} = \underline{70 \text{ cm.}}$$

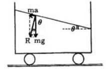
=.=.=.=.=.=.=.=

IX-16. Un recipiente que contiene un líquido, sufre una aceleración constante a.

1º) Demostrar que la superficie del líquido pasa a ser inclinada formando un ángulo θ con la horizontal y calcular dicho ángulo.

2º) ¿Cómo varía la presión con la profundidad?

1º) Sobre una partícula cualquiera de la superficie del líquido actuan: el peso de la partícula y la fuerza de inercia. La resultante de ambas ha de ser perpendicular a la superficie del liquido en su posición de equilibrio, luego



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m a}{m g} = \frac{a}{g}$$

2º) La presión en un punto del fluido, será

$$p = p_o + \rho g' h = p_o + \rho h \sqrt{a^2 + g^2}$$

y, por tanto,

$$\frac{dp}{dh} = \rho \sqrt{a^2 + g^2} = \rho \sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}}$$

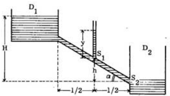
=.=.=.=.=.=.=.=

IX-17. Se tienen dos depósitos D_1 y D_2 a distinta altura comunicados por una tubería inclinada un ángulo con respecto a la horizontal. Calcular las velocidades del líquido en las secciones S_1 y S_2. Hallar la altura que alcazaría el agua en un capilar colocado en S_1.

Datos: S_1, S_2, H, l, α.

****

Aplicamos el teorema de Bernoulli entre un punto de la superficie de D_1 y un punto de la sección de salida S_2, tendremos:



$$p_o + \rho g H = p_o + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

o sea $V_2 = \sqrt{2gH}$

aplicando continuidad

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2$$

luego

$$V_1 = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gH}$$

Apliquemos, en el tubo capilar, el principio fundamental de la hidrostatica

$$p_1 - p_o = \rho g y \qquad y = \frac{p_1 - p_o}{\rho g}$$

Nuevamente apliquemos Bernoulli entre un punto de la superficie del depósito D_1 y un punto de la sección S_1, tendremos

$$p_o + \rho g H = p_1 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho V_1^2 \Rightarrow p_1 - p_o = \rho g(H-h) - \frac{1}{2}\rho V_1^2$$

luego

$$y = \frac{\rho g(H-h) - \frac{1}{2}\rho V_1^2}{\rho g} = \frac{gH - g\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2}V_1^2}{g} = \frac{2gH - gl\operatorname{tg}\alpha - V_1^2}{g}$$

o sea

$$y = 2H\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) - l\operatorname{tg}\alpha$$

=.=.=.=.=.=.=

IX-18. Por una tubería circular de longitud l = 20 m. y diámetro interno D = 10 cm. pasa una corriente fluida de viscosidad η = 200 cp. y densidad ρ = 1,09 gr/cm^3. Siendo el gasto de 1 litro/seg., calcular: 1º) Número de Reynolds. 2º) La pérdida de presión si la tubería es horizontal 3º) ¿Qué potencia consumiría la bomba que hiciese circular el fluido?

****

1º) Conociendo el gasto podemos calcular la velocidad media

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{1000}{25\pi} = 12'7 \text{ cm/seg.}$$

por tanto

$$R_e = \frac{\rho VD}{\eta} = \frac{1'09 \cdot 12'7 \cdot 10}{2} = 69'21$$

luego el régimen es laminar

2º) El gasto en régimen laminar viene dado por $Q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{l}$

luego

$$\Delta p = \frac{8\eta l Q}{\pi R^4} = \frac{8\eta l \pi R^2 v}{\pi R^4} = \frac{8\eta l v}{R^2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 2000 \cdot 12'7}{25} = 16256 \text{ barias}$$

3º) La potencia será

$$P = F \cdot v = \Delta p \cdot S\frac{Q}{S} = \Delta p \cdot Q = 16256 \cdot 1000 = 16'256 \cdot 10^6 \text{ ergios/seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-19. En un viscosímetro de Ostwald el tiempo que tarda en pasar el agua es t_1 = 6 seg. y el tiempo que tarda en pasar la glicerina es t_2 = 1 h. 3 min. 51 seg. Calcular la viscosidad de la glicerina.

Datos: viscosidad del agua η_1 = 0,01 poises, densidad del agua ρ_1 = 1 gr/cm^3 densidad de la glicerina ρ_2 = 1,3 gr/cm^3.

****

En un viscosímetro de Ostwald se verifica la siguiente relación

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{t_1}{t_2}$$

luego

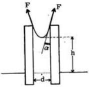
$$\eta_2 = \eta_1 \frac{\rho_2 t_2}{\rho_1 t_1} = 10^{-2}\ \frac{1,3 \cdot 3831}{6} = 8,3 \text{ poises}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-20. Dos láminas planas de vidrio de a cm. de altura y anchura 1 cm. se colocan verticalmente en una cubeta con agua, disponiendolas paralelas entre sí y a una distancia d = 0,5 mm. La tensión superficial entre el agua y el vidrio es σ = 75 dinas/cm. y el ángulo de contacto es cero. El agua sube por capilaridad entre las láminas hasta una cierta altura h en función de los datos anteriores y el valor de dicha altura para los valores numéricos indicados.

****

Para determinar la altura h igualaremos el peso del agua que se ha elevado entre las laminas y las fuerzas debidas a la tensión superficial que actuan a lo largo de las lineas de contacto agua-lámina.



el peso del agua elevada es $P = 1 \cdot h \cdot d\, \rho g$

la fuerza de tensión superficial $F = 2\sigma\, 1 \cos\alpha$

de donde

$$h = \frac{2\,\sigma \cos\alpha}{d\,\rho\, g}$$

si el ángulo de contacto es cero, $\cos\alpha = 1$

luego

$$h = \frac{2\,\sigma}{d\,\rho g} = \frac{150}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 980} = 3 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

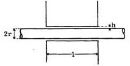
IX-21. Un eje de radio r = 5 cm. gira en un cojinete de longitud l = 15 cm., siendo el huelgo eje-cojinete $h = 2 \cdot 10^{-2}$ cm. y estando lleno el espacio entre ambos de un aceite de viscosidad η = 200 cp. Hallar: 1º) El par necesario para hacer girar el eje a la velocidad angular de 15 rev/seg. 2º) ¿Cúal será la potencia necesaria?

****

La fuerza tangencial que hay que vencer para que el eje gire es:

$$F = \eta\, S\, \frac{dv}{dr} = \eta\, 2\pi r\, L\, \frac{dv}{dx}$$

y el momento necesario, será



$$M = F \cdot r = \eta \cdot 2\pi r^2 \; L \frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo valores

$$M = 2 \cdot 2\pi \cdot 25 \cdot 15 \; \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 15}{2 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 1,1 \cdot 10^8 \text{ dinas. cm.}$$

La potencia necesaria, será

$$P = M\omega = 1,1 \cdot 10^8 \cdot 2\pi \cdot 5,15 = 5,18 \cdot 10^{10} \text{ ergios/seg.} = 5,18 \cdot 10^3 \text{ wqtios}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-22. Un tubo delgado de radio R está colocado verticalmente. Se llena de un líquido de viscosidad η y densidad ρ. Al destapar los dos extremos del tubo el fluido desliza. Calcular:
1º) La velocidad en el eje del tubo.
2º) La velocidad en un punto que diste del eje R/2.
3º) El gasto.

****

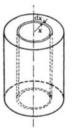
Consideremos un cilindro del mismo eje que el tubo y de radio $x (0 < x < R)$ e igualemos el peso del líquido a la fuerza de viscosidad que obra sobre el cilindro

$$\rho g \pi x^2 h + \eta \cdot 2\pi x h \frac{dv}{dx} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad F = \eta S \frac{dv}{dx}$$

de donde

$$\rho g x \, dx = -2\eta dv \Rightarrow dv = -\frac{\rho g}{2\eta} x \, dx$$

integrando y teniendo en cuenta que:



$$x = R \Rightarrow v = 0$$

$$\int_{v_x}^{0} dv = -\frac{\rho g}{2\eta} \int_x^R x \, dx \Rightarrow -v_x =$$

$$= -\frac{\rho g}{2\eta} \left[\frac{x^2}{2} \right]_x^R$$

luego $$v_x = \frac{\rho g}{4\eta} (R^2 - x^2)$$

1º) Para $x = 0$ $$v_{eje} = \frac{\rho g}{4\eta} R^2$$

2º) Para $x = \frac{R}{2}$ $$v = \frac{\rho g}{4\eta} \left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{3}{4} \frac{\rho g}{4\eta} R^2 = \frac{3}{4} \; V_{eje}$$

3º) Descomponiendo el tubo en tubos cilíndricos de radio x y espesor dx, tendremos

$$dQ = v_x ds = \frac{\rho g}{4\eta}\left(R^2 - x^2\right)\cdot 2\pi x \cdot dx$$

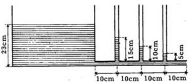
integrando

$$Q = \frac{\pi \rho g}{2\eta}\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)x\ dx = \frac{\pi \rho g}{2\eta}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi \rho g R^4}{8\eta}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-23. A partir de los datos indicados en la figura, y sabiendo que la densidad del fluido es de 1 g/cm^3 y que la tubería tiene una sección de 10 cm^2. Calcular:

a) La velocidad media del fluido, en la tubería.
b) La viscosidad del fluido en cp



****

a) La caida de presión debida a la viscosidad en la parte del tubo entre el deposito y el primer tubo manométrico es la correspondiente a una columna de agua de 5 cm.; por tanto, los 3 cm. de la parte superior comunican una energía cinética al líquido que fluye por el tubo. Luego

$$\frac{1}{2}\ v^2 = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 3} = \sqrt{5880} = 76'6 \text{ cm/s.}$$

b) Aplicando la fórmula de Poiseuille

$$Q = \frac{\pi \cdot R^4}{8\eta}\ \frac{\Delta P}{l} = Sv \Rightarrow \eta = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot S\ v}\ \frac{\Delta P}{l} = \frac{R^2}{8 \cdot v}\ \frac{\Delta P}{l}$$

o sea

$$\eta = \frac{R^2}{8 \cdot v}\ \frac{\rho \cdot g \cdot h'}{l} = \frac{10 \cdot 980 \cdot 5}{3'14 \cdot 8 \cdot 76'6 \cdot 10} = 250 \text{ cp.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-24. Una corriente de aceite de densidad 0,85 g·/cm^3, circula por una tubería de 1 dm. de diámetro, con una presión de 5 Kg/cm^2. En un punto de la tubería se reduce la sección a un diámetro de 0,5 dm. Calcular cual será la presión en ese punto. El caudal es de 20 l·/min.

****

Calculemos las velocidades del aceite en un punto de la tuberia de 1 dm. de diámetro

$$v_1 = \frac{C}{S_1} = \frac{\frac{20000}{60}}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{\frac{1000}{3}}{\frac{100\pi}{4}} = \frac{40}{3\pi} \ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

la velocidad en el estrechamiento es

$$v_2 = \frac{C}{S_2} = \frac{\frac{1000}{3}}{\frac{25\pi}{4}} = \frac{160}{3\pi} \ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

Apliquemos el teorema de Bernoulli, tendremos

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

y

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 980 \cdot 5000 + \frac{1}{2}\, 0'85\left(\frac{1600-25600}{9\pi^2}\right) =$$

$$= 4.900.000 - 113 = 4.899.887 \ \text{dinas/cm}^2 = 4,95 \ \text{Kg/cm}^2$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-25. Una fina placa cuadrada de metal, de 6 cm. de lado está suspendida verticamente de una balanza de modo que el borde inferior está sumergido en agua, si la placa está limpia el ángulo de contacto entre e; agua y el metal es 0º y el peso aparente 4700 dinas; si la placa tiene una capa de grasa el ángulo de contacto es 180°y el peso aparente 3000 dinas.

¿Cúal es el coeficiente de tensión superficial del agua?

****

El peso aparente cuando la placa está limpia y, por tanto, el agua moja a la placa, será

$$P_a = P + 2l\sigma - E \quad \Rightarrow \quad 4700 = P + 2l\sigma - E$$

y si cubrimos la placa con grasa el agua no moja a la placa, luego

$$P_a = P - 2l\sigma - E \quad \Rightarrow \quad 3000 = P - 2l\sigma - E$$

Restando las ecuaciones obtenidas

$$1700 = 4l\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1700}{4\times 6} = 70,83 \ \text{dinas/cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-26. El coeficiente de viscosidad de la sangre humana es 4,7 cp.¿Cúal será la diferencia de presión por unidad de longitud en un vaso capilar de sección transversal $2,1\cdot 10^{-6}$ cm., si conocemos el flujo a través de él $G = 4,2\cdot 10^{12}\ m^3 s^{-1}$. ¿Será mayor esta diferencia de presión que la existente en una arteria de sección transversal $3\cdot 10^{-1}\ cm^2$ y flujo $1,2\cdot 10^{-5}\ m.^3 s^{-1}$?

Apliquemos la fórmula de Poiseuille: $G = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{L}$

como $L = 1$, tendremos

$$\Delta p = \frac{8\eta G}{\pi R^4} = \frac{8\eta G}{S^2/\pi} = \frac{8\pi\eta G}{S^2} = \frac{8\pi \cdot 4,7 \cdot 10^{-2} \cdot 4,2 \cdot 10^{-6}}{(2,1)^2 \cdot 10^{-12}} = 11,2 \cdot 10^5 \text{ dinas/cm}^2$$

En el caso de la arteria

$$\Delta p' = \frac{8\pi\eta G'}{S'^2} = \frac{8\pi \cdot 4,7 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 \cdot 10}{9 \cdot 10^{-2}} = 157,4 \text{ dinas/cm}^2$$

Efectivamente, es mayor en el capilar que en la arteria.

=.=.=.=.=.=

IX-27. Se tienen 300 gotitas de aceite de radio r = 1 mm. y densidad ρ = 0,9 gr/cm^3. Hallar: 1°) El trabajo necesario para formar una sola gota con todas las gotitas. 2°) La energía liberada en esta operación. Tensión superficial del aceite σ = 32 dinas/cm.

****

1°) Hallemos el radio de la gota formada con las n = 300 gotitas

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n\,\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R^3 = n r^3 \Rightarrow R = r(300)^{1/3} = 0,67 \text{ cm.}$$

El trabajo necesario para formar una gota de radio R, será

$$W = \sigma S = 4\pi R^2 \sigma = 4\pi \cdot 44,89 \cdot 32 = 170,42 \text{ ergios}$$

2°) La energía liberada será

$$\Delta E = n\,\sigma\,S' - W = n \cdot 4\pi r^2 \sigma - W$$

o sea

$$\Delta E = 300 \cdot 4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 32 - 170,42 = 1205,76 - 170,42 = 1035,34 \text{ ergios}$$

=.=.=.=.=.=.=

IX-28. Dos depósitos abiertos muy grandes A y F contienen el mismo líquido. Un tubo corto y horizontal BCD, cuyo eje se encuentra a una altura h_1 por debajo del nivel del líquido en A, descarga agua del fondo del depósito A. En el estrechamiento G se coloca un tubo vertical E que se introduce en el líquido de F. Si la sección en G es la mitad que en D, Calcular en función de h_1, la altura h_2 que alcanzará el líquido en el tubo E. Supóngase regimen currentilíneo y sin viscosidad y desprecíese las variaciones de presión con la altura.

****

Apliquemos la formula de Torricelli para obtener la velocidad de salida del liquido

$$v_D = \sqrt{2 g h_1}$$

por el principio de continuidad: $s_C \cdot v_C = s_D \cdot v_D$ y $v_C = 2v_D$

aplicando Bernoulli entre los puntos P y P', tendremos

$$\frac{1}{2}\rho v_C^2 + p_C = \frac{1}{2}\rho v_D^2 + p_D \quad \text{siendo} \quad p_D = p_o \text{ (presión atmosférica)}$$

luego $$p_o - p_C = \frac{1}{2}\rho\left[v_C^2 - v_D^2\right] = \frac{1}{2}\rho\left[4v_D^2 - v_D^2\right] = \frac{3}{2}\rho \cdot 2gh_1 = 3\rho g h_1$$

por el principio fundamental de la hidrostática

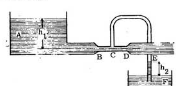
$$p_o - p_C = \rho g h_2$$

de donde

$$\rho g h_2 = 3\rho g h_1$$

y

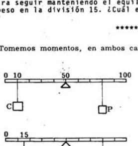
$$\boxed{h_2 = 3h_1}$$



IX-29. Una barra homogénea y de sección constante de 1 m. de longitud, dividida en cm, se apoya por la división 50 sobre una cuña, en la cual se mantiene en equilibrio. Colgada una masa metálica en la división 80 hay que colocar un determinado contrapeso en la división 10 para que se siga manteniendo el equilibrio. Introducida la masa metálica en agua, para seguir manteniendo el equilibrio, hay que colocar el mismo contrapeso en la división 15. ¿Cuál es la densidad de la sustancia metálica?

****

Tomemos momentos, en ambos casos, respecto al punto de apoyo de la barra:



En la primera posición

$$C \cdot 40 = P \cdot 30$$

en la segunda posición

$$C \cdot 35 = (P-E)\,30$$

dividiendo miembro a miembro

$$\frac{40}{35} = \frac{P}{P-E}$$

Sea V el volumen de la masa metálica y ρ su densidad, tendremos

$$\frac{8}{7} = \frac{V\rho g}{V\rho g - Vg} \Rightarrow \frac{8}{7} = \frac{\rho}{\rho - 1} \Rightarrow \rho = 8\,\text{gr/cm}^3$$

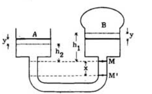
=.=.=.=.=.=.=

IX-30. Un sistema de vasos comunicantes está formado por dos vasos cilíndricos A y B cuyo diámetro interior es 2R = 8 cm. Se unen entre sí por un tubo de diámetro 2r = 1 cm., recurvado. Estos vasos contienen en A agua (densidad a = 1) y en B bencina (b = 0,899). La superficie de separación de éstos líquidos está en M. El vaso A está abierto a la atmosfera y el B está en comunicación con un recipiente cerrado donde existe inicialmente la presión atmosferica H. Calcular el desplazamiento que sufre el nivel M cuando se aumente, en este recinto cerrado, la presión en ΔH = 0,076 cm de Hg. Densidad del mercurio ρ = 13,6.

****

Llamemos x e y a las alturas bajadas por el nivel de la bencina en B y en el estrechamiento, se verificará:

$$\pi R^2 y = \pi r^2 x \Rightarrow y = \frac{r^2}{R^2} x$$



Igualemos presiones en el nivel M, antes de aumentar la presión en B

$$\rho H + h_1 b = \rho H + h_2 a \Rightarrow h_1 b = h_2 a$$

Igualemos presiones en el nivel M' después de aumentar la presión en B.

$$\rho(H + \Delta H) + (h_1 - y + x)b = \rho H + (h_2 + y + x)a$$

operando y eliminando términos comunes a ambos miembros, quedará

$$\rho \Delta H + \left(x - \frac{r^2}{R^2} x\right) b = \left(\frac{r^2}{R^2} x + x\right) a$$

de donde

$$x = \frac{\rho \Delta H}{a - b + (a+b)\frac{r^2}{R^2}} = \frac{13,6 \times 0,076}{1 - 0,899 + 1,899\frac{0,25}{16}} = 7,9 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

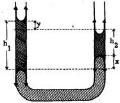
IX-31. Un tubo en forma de U, de ramas verticales y radio interior r = 0,1 cm., contiene mercurio. En una de las ramas se echa, sobre el mercurio una columna de agua de altura h_1 = 60 cm. y en la otra rama una columna de aceite de altura h_2 = 50 cm. Las superficies libres son semiesféricas cóncavas con respecto al aire, y las de separación agua-mercurio y aceite-mercurio, semiesféricas cóncavas del lado del mercurio. Los coeficientes de tensión superficial son: Agua-aire, σ_1 = 72 dinas/cm ; aceite-aire, σ_2 = 32 dinas/cm ; mercurio-agua, σ_3 = 416 dinas/cm. ; mercurio-aceite, σ_4 = 332 dinas/cm. Las densidades son: Densidad del agua, ρ_1 = 1 ; del aceite, ρ_2 = 0,9 y del mercurio, ρ_3 = 13'6. ¿Cúal es la diferencia de nivel entre las superficies libres del agua y aceite?

****

Llamemos x a la diferencia de niveles del mercurio e igualemos la suma de fuerzas existentes en cada rama, debidas al peso de los liquidos y a la ten-

sión superficial, en el nivel correspondiente a la superficie mas baja de los dos del mercurío.

$$\pi r^2 h_1 \rho_1 g + 2\pi r \sigma_3 - 2\pi r \sigma_1 = \pi r^2 h_2 \rho_2 g + \pi r^2 x \rho_3 g + 2\pi r \sigma_4 - 2\pi r \sigma_2$$



o sea

$$r h_1 \rho_1 g + 2(\sigma_3 - \sigma_1) = r h_2 \rho_2 g + r \rho_3 g x + 2(\sigma_4 - \sigma_2)$$

de donde

$$x = \frac{r g (h_1 \rho_1 - h_2 \rho_2) + 2(\sigma_3 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_4)}{r \rho_3 g} =$$

$$= \frac{0,1 \cdot 980(60 - 50 \cdot 0,9) + 2(416 - 72 + 32 - 332)}{0,1 \cdot 980 \cdot 13,6} = 1,16 \text{ cm.}$$

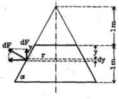
La diferencia de nivel pedida, será:

$$y = h_1 - (h_2 + x) = 60 - (50 + 1,16) = 8,84 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

IX-32. Un depósito tiene forma de tronco de cono de 1m. de altura, 1m. de diámetro en la parte superior y 2m. de diámetro en la parte inferior. El depósito no tiene tapa ni fondo, y se mantiene aplicado por su propio peso contra una superficie plana y horizontal. Se pide: Cuánto debe pesar el depósito para que se pueda llenar de agua hasta el nivel superior sin que se salga por debajo.

****



La fuerza elemental debido a la presión del líquido, sobre un elemento de pared es:

$$dF = p\, ds = \rho g\, y\, ds$$

pero $ds = 2\pi r \dfrac{dy}{\operatorname{sen}\alpha}$

la componente vertical de dicha fuerza será

$$dF_y = \rho g\, y\, 2\pi r \frac{dy}{\operatorname{sen}\alpha} \cos\alpha = \frac{2\pi\rho g}{\operatorname{tg}\alpha} \frac{1+y}{2} y\, dy$$

la fuerza total hacia arriba será:

$$F = \frac{\pi \rho g}{\operatorname{tg}} \int_0^1 (1 + y) y\, dy = \frac{\pi\rho g}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{5}{12}\pi\rho g = 1309 \text{ Kg.}$$

Para que no se salga el agua, el depósito debe pesar <u>1309 Kg.</u>

=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO X

TERMOLOGIA

X-1. Una barra delgada de hierro tiene un radio $r = 2$ mm. y una longitud $l = 100$ cm. a $0°C$.
Calcular: a) La longitud de la barra a $90°C$.
b) La variación de volumen de la barra cuando la temperatura pasa de 0° a 90° C.
Coeficiente de dilatación lineal del hierro: $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}/°C$.

****

a) La longitud de la barra a temperatura t viene dada por la expresión

$$l_t = l_o (1 + \alpha t)$$

Sustituyendo valores

$$l_{90} = 100\,(1 + 12 \cdot 10^{-6} \cdot 90) = 100{,}108 \text{ cm.}$$

b) El volumen de la barra a la temperatura de 0^oC es:

$$V_o = \pi r^2 l = 3{,}14 \cdot (2 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 10^2 = 12{,}56 \text{ cm}^3$$

El coeficiente de dilatación cúbica es: $\gamma = 3\alpha = 36 \cdot 10^{-6}/^oC$

y el incremento de volumen experimentado por la barra al calentarla desde 0^o a 90^oC, será:

$$\Delta V = V_o \cdot \gamma \cdot \Delta t = 12{,}56 \cdot 36 \cdot 10^{-6} \cdot 90 = 0{,}04 \text{ cm}^3$$

=.=.=.=.=.=.=

X-2. Un recipiente de vidrio a 10°C está lleno con 60 cm^3 de Hg. Calcular el volumen de mercurio que se derramará al calentar el conjunto a 30°C.

Coeficiente de dilatación lineal del vidrio $\alpha = 9 \cdot 10^{-6}\ (°C)^{-1}$
" " " del mercurio $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4}\ (°C)^{-1}$

****

El volumen ocupado por el mercurio después de calentar debería ser:

$$V' = V\,\frac{1+\beta t_2}{1+\beta t_1} = 60\,\frac{1+1,8\cdot 10^{-4}\cdot 303}{1+1,8\cdot 10^{-4}\cdot 283} \approx 60,216\ \ cm^3$$

y el volumen del recipiente calentado

$$V'' = V\,\frac{1+3\alpha t_2}{1+3\alpha t_1} = 60\,\frac{1+27\cdot 10^{-6}\cdot 303}{1+27\cdot 10^{-6}\cdot 283} \approx 60,032\ \ cm^3$$

El volumen de mercurio derramado, será

$$\Delta V = V' - V'' = 60,216 - 60,032 = 0,184\ \ cm^3$$

=.=.=.=.=.=.=

X-3. Un reloj de péndulo de cobre, funciona correctamente a 15°C. Sabiendo que si el reloj funciona en un lugar cuya temperatura es 86°F, se retrasa 15 segundos cada día, se pide calcular el coeficiente de dilatación del cobre.

****

La relación entre la temperatura Centígrada y Farenheit es:

$$\frac{t^{o}C}{5} = \frac{F-32}{9}$$

luego $$t^{o}C = \frac{5}{9}(F-32) = \frac{5}{9}(86-32) = \frac{5}{9}\,54 = 30^{o}C.$$

La diferencia entre los períodos del péndulo a $30^{o}C$ y $15^{o}C$ es

$$T_{30} - T_{15} = \frac{15}{86400}$$

luego $$T_{30} = T_{15} + \frac{15}{86400} = 1 + \frac{15}{86400} = \frac{86415}{86400} = \frac{5761}{5760}$$

Aplicando dos veces la fórmula del péndulo, obtendremos

$$\left.\begin{array}{l} T_{15} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l(1+15\alpha)}{g}} \\[2ex] T_{30} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l(1+30\alpha)}{g}} \end{array}\right\} \quad \frac{T_{15}}{T_{30}} = \sqrt{\frac{1+15\alpha}{1+30\alpha}}$$

o sea $$\left[\frac{5760}{5761}\right]^2 = \frac{1+15\alpha}{1+30\alpha}$$

de donde $$\alpha = \frac{5761^2 - 5760^2}{30\cdot 5760^2 - 15\cdot 5761^2} = 13\cdot 10^{-6}/^\circ C.$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-4. Un termómetro contiene mercurio a 0°C. Con mercurio hasta la división 0, pesa p = 32 gr. y con mercurio hasta la división 90, pesa p' = 32,28 gr. Hallar el coeficiente de dilatación lineal del vidrio, sabiendo que el coeficiente de dilatación real del mercurio es $\alpha = 1{,}82\cdot 10^{-4}/$ °C y que el peso del vidrio que forma el termómetro es p" = 12 gr.

****

Llamemos ρ a la densidad del mercurio a 0°. El volumen del termómetro hasta la división 0 es:

$$V_0 = \frac{p-p''}{\rho} = \frac{32-12}{\rho} = \frac{20}{\rho}$$

El volumen del termómetro hasta la división 90°, medido a $0^\circ C$ es

$$V_1 = \frac{p'-p''}{\rho} = \frac{32{,}28-12}{\rho} = \frac{20{,}28}{\rho}$$

Igualando los volumenes del mercurio y del termómetro a la temperatura de 90°, tendremos:

$$\frac{20}{\rho}(1+90\alpha) = \frac{20{,}28}{\rho}(1+90\cdot 3\lambda)$$

siendo λ el coeficiente de dilatación lineal del vidrio.

Operando

$$\lambda = \frac{20(1+90\cdot 1{,}82\cdot 10^{-4}) - 20'28}{90\cdot 3\cdot 20'28} = 8{,}69\cdot 10^{-6}/^\circ C.$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-5. El volumen del depósito de un termómetro de mercurio es V_0 cm^3 a la temperatura de 0°C y la sección transversal del capilar a esa misma temperatura es A_0 cm^2. Si el mercurio llena justamente el deposito a 0°C. ¿Cual es la longitud de la columna de mercurio en el capilar a la temperatura de 60°C? Datos: $V_0 = 400\ A_0$; coeficiente de dilatación del mercurio $\alpha = 1{,}8.10^{-4}$ $(°C)^{-1}$; coeficiente de dilatación lineal del vidrio $\beta = 9.10^{-6}$ (°C).

****

A temperatura de $t^{o}C$, el volumen del depósito, es:

$$V = V_o(1 + 3\beta t)$$

El volumen del mercurio a esa misma temperatura, es

$$V' = V_o(1 + \alpha t)$$

En el capilar entrará un volumen de mercurio igual a la diferencia V-V', o sea

$$v = V - V' = V_o(1 + \alpha t) - V_o(1 + 3\beta t) = V_o(\alpha - 3\beta)t$$

Por otra parte, v será también

$$v = lA_o(1 + 2\beta t)$$

Igualando las dos expresiones de v, tendremos

$$V_o(\alpha - 3\beta)t = lA_o(1 + 2\beta t)$$

de donde

$$l = \frac{V_o}{A_o}\ \frac{\alpha - 3\beta}{1 + 2\beta t}\, t = 400\ \frac{(180-27)10^{-6}}{1 + 18 \cdot 10^{-6} \cdot 60}\ 60 \simeq \underline{3'65\ \text{cm.}}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-6. Un calorímetro de cobre, de masa 100 g. contiene 150 g. de agua y el conjunto está a 0°C. Se deja caer dentro del calorímetro 100 g. de plomo a la temperatura de 200°C. Sabiendo que el calor específico del cobre es 0,093 cal/g.°C. y el del plomo 0,031 cal/g.°C. Se pide:

a) Calcular la temperatura final si no ha habido pérdidas de calor al medio ambiente.

b) Si inicialmente hubiese 8 g. de hielo en equilibrio térmico con el agua a 0°C. Qué ocurre en este caso y cuál es la temperatura final.

****

a) Llamemos t a la temperatura final. Igualando el calor ganado por el calorímetro y el agua, al calor perdido por el plomo, tendremos:

$$100 \cdot 0,093\,(t - 0) + 150\,(t - 0) = 100 \cdot 0,31\,(200 - t)$$

operando

$$t = \frac{620}{162'4} = 3'8^{o}C.$$

b) Todo el calor perdido por el plomo se invertiría en fundir parte del hielo, ya que solamente para fundir los 8 gramos de hielo se necesitan

$$Q_g = 8 \cdot 80 = 640\ \text{cal.}$$

Cuando el plomo llegue a una temperatura de $0^{o}C$, se habrán desprendido

$$Q_p = 100 \cdot 0'031 \cdot 200 = 620 \text{ cal.}$$

El equilibrio térmico se establece a la temperatura de 0^oC. y las cantidades de hielo y agua en el calorímetro, una vez establecido el equilibrio serán

$$m_h = 8 - \frac{620}{80} = 8 - 7'75 = 0'25 \text{ gr. de hielo}$$

$$m_a = 150 + \frac{620}{8} = 150 + 7'75 = 157'75 \text{ gr. de agua}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-7. En un platillo de una balanza se coloca una tara invariable y en el otro se van colocando sucesivamente los objetos y pesas necesarios para establecer el equilibrio.

1º) Un calorímetro cuyo equivalente en agua son 8 gramos y pesas por el valor de 390 gramos.

2º) El mismo calorímetro con cierta cantidad de agua a 32° y pesas por el valor de 128 gramos.

3º) El mismo calorímetro con el agua que tenía y un bloque de hielo a 0° y pesas por valor de 118 gramos.

Cuando el hielo se ha fundido la temperatura del agua ha descendido a 28°.

Deducir de estos datos el calor de fusión del hielo.

****

Llamemos M a la masa de la tara invariable.

En el primer caso tendremos: $M = m_c + 390$ (I)

" " segundo " " $M = m_c + m_a + 138$ (II)

" " tercer " " $M = m_c + m_a + m_h + 118$ (III)

Igualando (I) y (II), obtenemos la masa de agua

$$m_c + 390 = m_c + m_a + 128 \Rightarrow m_a = 390 - 128 = 262 \text{ gr. de agua}$$

de (II) y (III), obtenemos la masa de hielo

$$m_c + m_a + 128 = m_c + m_a + m_h + 118 \Rightarrow m_h = 128 - 118 = 10 \text{ gr. de}$$

hielo.

Igualando el calor perdido por el calorímetro y el agua, al calor preciso para fundir los 10 gr. de hielo y además calentar los 10 gr. de agua desde la temperatura de 0^o a la de 28^o, tendremos,

$$8(32-28) + 262(32-28) = 10 \cdot C_f + 10 \cdot 28$$

de donde

$$C = \frac{800}{10} = 80 \text{ cal./gr.}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-8. ¿Qué peso de vapor de agua a 100° C debe inyectarse en un recipiente metálico de 30 Kg. de peso que contiene 100 Kg. de hielo a -20°C para ponerlo a la temperatura de 25°C, sabiendo que previamente se añadieron 15 Kg. de agua a 100°C? ¿En qué condiciones térmicas se encontraba el baño cuando se empezó a inyectar el vapor?

Calor específico del metal $C_m = 0,2$; calor específico del hielo $C_h = 0,5$; calor de fusión del hielo, $C_f = 80$; calor de vaporización del agua, $C_v = 537$.

****

Cantidad de calor absorbido por el recipiente:

$$Q_1 = 30 \cdot 0,2(20 + 25) = 270 \text{ Kc.}$$

Cantidad de calor necesaria para que el hielo pase de -20° a $0^\circ C$

$$Q_2 = 100 \cdot 0,5 \cdot 20 = 1000 \text{ Kc.}$$

Calor necesario para fundir el hielo

$$Q_3 = 100 \cdot 80 = 8000 \text{ Kc.}$$

Cantidad de calor necesaria para calentar 100 Kg. de agua desde 0° hasta 25°C.

$$Q_4 = 100 \cdot 25 = 2500 \text{ Kc.}$$

Calor total absorbido

$$Q_a = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 11770 \text{ Kc.}$$

Calor desprendido al condensarse el vapor de agua

$$Q_5 = 537 \; P_v$$

Calor desprendido al pasar el agua desde 100° a 25°C

$$Q_6 = (15 + p_v)(100-25) = 1125 + 75 \; p_v$$

Calor total desprendido:

$$Q_d = Q_5 + Q_6 = 1125 + 612 \; p_v$$

Igualando el calor absorbido al calor desprendido

$$11170 = 1125 + 612 \; p_v \Rightarrow p_v = \frac{10645}{612} = 17'394 \text{ Kg.}$$

Sea x la cantidad de hielo que se funde al añadir los 15 Kg. de agua a 100°C. Igualando el calor absorbido al calor desprendido, tendremos,

$$30 \cdot 0,2 \cdot 20 + 100 \cdot 0'5 \cdot 20 + 80x = 15 \cdot 100$$

$$x = \frac{1500 - 120 - 1000}{80} = 4'75 \text{ Kg.}$$

La cantidad de agua en el recipiente será: $4'75 + 15 = 19'75$ Kg.

" hielo " " " " : $100 - 4'75 = 95'25$ Kg.

=.=.=.=.=.=.=

X-9. Un montacargas eleva P = 427 Kg. a una altura h = 36 m. con una velocidad de v = 0,60 m/seg. La energía perdida por resistencias pasivas en el motor que acciona la instalación se transforma en calor y su valor es tal que en n = 100 ascensiones del montacargas dicho calor eleva la temperatura de una mecla de m_1 = 5 Kg. de hielo y m_2 5 Kg. de agua a 0°C hasta 122°F. Se pide: 1°) Rendimiento del motor 2°) Potencia del motor en C.V.

Calor de fusión del hielo c = 80 cal/gr. 1Kc = 427 Kgm.

****

1º) El trabajo útil de elevar el montacargas n veces es:

$$W_u = P \cdot h \cdot n = 427 \cdot 36 \cdot 100 = 1537200 \text{ Kgm.}$$

la temperatura final de la mezcla en °C es $t = \frac{5}{9}(122-32) = 50°C$

la cantidad de calor absorbido por la mezcla es:

$$Q = m_1 \cdot c + (m_1 + m_2)t = 5 \cdot 80 + 10 \cdot 50 = 900 \text{ Kc}$$

luego la energía pérdida valdrá

$$W_p = 900 \cdot 427 = 384300 \text{ Kgm.}$$

el rendimiento del motor valdrá

$$\rho = \frac{W_u}{W_u + W_p} = \frac{1 \cdot 537 \cdot 200}{1 \cdot 921 \cdot 500} = 0,8$$

2º) El tiempo que tarda en las 100 ascensiones es

$$t = \frac{h}{v} n = \frac{36}{0'6} \cdot 10 = 6000 \text{ seg.}$$

y la potencia es

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1921500}{6000 \cdot 75} = 4'26 \text{ C. V.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-10. Calcular el incremento de la entropía específica del agua cuando se la calienta a la presión atmosférica constante, desde -18°C donde se encuentra en forma de hielo hasta 150°C, donde se encuentra en forma de vapor sobre calentado.

Datos: c_p del hielo 0.5 cal/g °C
c'_p del agua 1.0 cal/g °C
c''_p del vapor 0.47cal/g °C
calor de fusión del hielo 1' = 80 cal/g
calor de vaporización del agua 1" = 540 cal/g.

****

La variación de entropía al pasar de hielo a -18^{o} a hielo a 0^{o} será:

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{m\, C_p\, dT}{T} = C_p \int_{255}^{273} \frac{dT}{T} = 0,5\ L\,\frac{273}{255} = 0,034\ \text{cal/gr}\,^{o}C$$

al fundir el hielo la variación de entropía valdrá:

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T} = \frac{80}{273} = 0,293\ \text{cal}/^{o}C\cdot\text{gr}$$

al pasar de agua a 0^{o} a agua a 100^{o} valdrá:

$$\Delta S_3 = \int \frac{dQ}{T} = C'_p\, L\,\frac{373}{273} = L\,\frac{373}{273} = 0,312\ \ \text{cal}/^{o}C\cdot\text{gr.}$$

la variación de entropía al evaporarse el agua valdrá:

$$\Delta S_4 = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{1}{373}\,540 = 1,448\ \ \text{cal}/^{o}C\cdot\text{gr.}$$

y al pasar a vapor de agua sobrecalentado

$$\Delta S_5 = C''_p\, L\,\frac{423}{373} = 0,47\cdot 0,125 = 0,059\ \ \text{cal/gr.}\,^{o}C$$

la variación de entropía total vale:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 + \Delta S_5 = 2,146\ \ \text{cal}/^{o}C\cdot\text{gr.}$$

= = = = = = = = =

X-11. Un mol de un gas perfecto se expansiona isotérmicamente a 27^{o} C desde un volumen inicial de 2 litros hasta uno final de 8 litros. Calcular la variación de energía interna, de entalpía y de entropía.

$$R = 2\text{cal/mol}^{o}K;\quad \ln 2 = 0'69$$

****

Por ser el proceso a temperatura constante y la energía interna función de la temperatura, no habrá variación de energía interna, o sea $\Delta U = 0$

La entalpía viene dada por la expresión: $H = U + pV$

en una transformación isotérmica $\Delta H = 0$ ya que

$$\left.\begin{array}{l}\Delta U = 0 \\ pV = \text{Cte}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta H = 0$$

En un proceso isotérmico la variación de entropía viene dada por

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1} \cdot \int_1^2 dQ = \frac{Q_{12}}{T_1}$$

siendo

$$Q_{12} = W_{12} = \int_1^2 p \cdot dV = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

luego

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 2 \cdot \ln \frac{8}{2} = 2 \cdot \ln 4 = 4 \cdot \ln 2 = 2'76 \ \mathrm{cal/^oK}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-12. La energía interna de un cierto gas ideal viene dada por la expresión

$$U = R \cdot (a-T) - a \cdot \ln (a-T)$$

donde R es la constante de los gases y a otra constante. Calcular c_p, c_v y el índice adiabático γ.

****

Sabemos que $dU = C_v \cdot dT$

luego

$$C_v = \frac{dU}{dT} = -R + \frac{a}{a-T}$$

Aplicando la formula de Mayer: $C_p - C_v = R$

$$C_p = C_v + R = \frac{a}{a-T}$$

como $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ tendremos

$$\gamma = \frac{\frac{a}{a-T}}{\frac{a}{a-T} - R} = \frac{a}{a - R(a-T)}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-13. Dos moles de un gas perfecto monoatómico se expansionan isotermicamente a 400°K, desde una presión inicial de 4 atmosferas, hasta otra final de 1 At. Calcular:

a) El trabajo realizado por el gas en julios
b) El calor absorbido en calorias
c) La variación de energía interna en julios

Datos: $R = 2$ cal/mol°K ; $\ln 2 = 0'69$

****

a, b y c) Por ser una expansión isoterma no habrá variación de energía interna, por tanto

$$\Delta U = 0$$

aplicando el primer principio fundamental de la termodinámica y teniendo en cuenta el resultado anterior

$$Q = W$$

o sea el calor absorbido es igual al trabajo realizado

El trabajo será:

$$W = \int p\,dV = nRT\int_{v_1}^{v_2}\frac{dV}{V} = nRT\ L\ \frac{v_2}{v_1} = nRT\ L\ \frac{P_1}{P_2} = 1600\ L4 = 3200\ L2 =$$

$$= 2208 \text{ cal}$$

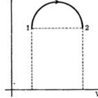
luego

$$W = 0'24 \cdot 2208 = 529'92 \text{ julios}$$

$$Q = 2208 \text{ cal.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-14. Determinar la variación de energía interna que experimenta 1 mol de gas biatómico que evoluciona según la transformación semicircular de la fig.



Datos: $p_1 = p_2 = 1$ At

$V_1 = 8,2$ litros

$V_2 = 82$ litros

****

Como el gas es biatómico $\quad C_v = \frac{5}{2}R = 5 \text{ cal/mol}^oK$.

Además

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1 \times 8,2}{1 \times 0,082} = 100^oK$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{n\ R} = \frac{1 \times 82}{1 \times 0,082} = 1000^oK$$

La variación de energía interna será

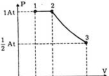
$$U_2 - U_1 = n\ C_v\ (T_2 - T_1) = 1 \times 5\ (1000 - 100) = 4500 \text{ cal} = 18.810 \text{ julios}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-15. Un mol de un gas ideal realiza las dos transformaciones representadas en la fig: a) De 1 a 2, a presión constante b) de 2 a 3, a temperatura constante. $C_v = 5$ cal/mol°K

1º) Calcular el calor y el trabajo total.
2º) ¿Se podrá asegurar que el incremento de energía interna total sea igual al incremento de energía interna de 1 a 2?

****



1º) En la primera transformación (1-2) tendremos: $W_{12} = P(V_2 - V_1) =$

$= 1$ At. litro $= \underline{101,3 \text{ julios}}$

$$\Delta U_{12} = n\,C_v(T_2 - T_1) = C_v \frac{P(V_2 - V_1)}{R} =$$

$$= \frac{5}{0'082} = 61 \text{ calorias}$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12} = 61 + 0'24 \cdot 101,3 =$$

$$= \underline{85'31 \text{ cal.}}$$

En la transformación isoterma, 2 a 3, tendremos:

$$\Delta U_{23} = 0$$

$$Q_{23} = W_{23} = \int P dV = P_2 V_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = P_2 V_2 \, L \frac{V_3}{V_2} = 2\ L\ 2 = 2 \cdot 0'69 =$$

$= 1'38$ At. litros $= 139'9$ julios $= 33'6$ cal.

Por tanto

$$Q_T = Q_{12} + Q_{23} = 85'31 + 33'6 = 118'91 \text{ cal.}$$

$$W_T = W_{12} + W_{23} = 101'3 + 139'9 = 241'2 \text{ julios}$$

2º) $\Delta U_{13} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23}$

como $\Delta U_{23} = 0$

quedará $\Delta U_{13} = \Delta U_{12}$

=.=.=.=.=.=.=

X-16. Calcular la potencia necesaria para comprimir hasta una presión de 5 Kg/cm^2, 10 m^3/h, de aire tomado inicialmente a la presión de 760 mm. de mercurio y a 27°C.

a) Cuando la compresión es isoterma
b) Cuando la compresión es adiabática ($\gamma = 1'4$)(Se considera el aire como un gas perfecto). Tómese 1At = 1 Kg/cm^2

****

a) El trabajo suministrado cuando la compresión sea isoterma es

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = p_1V_1 L\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 L\frac{p_1}{p_2} = 1\cdot 10^4 L\frac{1}{5} =$$

$$= -16077 \text{ At}\cdot 1 = -1626992,4 \text{ julios}$$

y la potencia necesaria

$$P_1 = \frac{W_1}{t} = \frac{1626992,4}{3600} = 451,94 \text{ watios}$$

b) Cuando la compresión sea adiabática

$$W_2 = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = pV^{\gamma}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^{\gamma}} = pV^{\gamma}\,\frac{V_2^{1-\gamma}-V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{p_2V_2-p_1V_1}{1-\gamma}$$

como $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} \Rightarrow V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = 10^4\left(\frac{1}{5}\right)^{1/1'4} = 3130$ litros

$$W_2 = \frac{5\cdot 3130 - 10000}{1-1,4} = -14{\cdot}125 \text{ At}\cdot 1 = -1429440 \text{ julios}$$

y la potencia necesaria

$$P_2 = \frac{W_2}{t} = \frac{1429\,440}{3600} = 397,66 \text{ watios}$$

=.=.=.=.=.=

X-17. Un cilindro têrmicamente aislado encierra en su interior un mol de gas biatómico a 10°C, si duplicamos el volumen que ocupa el gas, calcular el trabajo realizado en la expansión, el calor intercambiado y la variación de energía interna.

****

Por estar, el cilindro, aislado térmicamente la transformación experimentada por el gas es adiabática.

El trabajo en una transformación adiabática se puede expresar de la forma siguiente

$$W = \frac{p_2V_2-p_1V_1}{1-\gamma} = \frac{nR(T_2-T_1)}{1-\gamma}$$

donde $R = 8'3$ julios / mol^{o}K

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7/2\ R}{5/2\ R} = \frac{7}{5} = 1,4 \quad \text{ya que el gas es biatómico}$$

y $$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 283\left(\frac{1}{2}\right)^{0,4} = 215^{\circ}K$$

luego
$$W = \frac{8'3(215-283)}{1-1'4} = 1.411 \text{ julios}$$

el calor intercambiado será, Q = 0, al ser la transformación adiabática

La variación de energía interna valdrá

$$\Delta U = -W = -1411 \text{ julios}$$

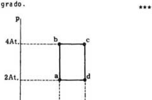
=.=.=.=.=.=.=.=

X-18. Un cilindro contiene un gas ideal a la presión de 2 At. siendo el volumen de 5 litros a la temperatura de 250°K. El gas se calienta a volumen constante hasta una presión de 4 At. y a continuación a presión constante hasta una temperatura de 650°K. Calcular el calor absorbido por el gas durante estos procesos.

Después el gas se enfria a volumen constante hasta que recupera su presión inicial y luego a presión constante hasta volver al estado inicial. Calcular el calor cedido durante el ciclo.

C_v = 21 Julios/mol.grado y R = 0,082 At× l./mol.grado = 8,3Julios/mol. grado.

****



La temperatura en b, será

$$T_b = T_a \frac{p_b}{p_a} = 250 \frac{4}{2} = 500^{\circ}K$$

el volumen en c, será

$$V_c = V_b \frac{T_c}{T_b} = 5 \frac{650}{500} = 6'5 \text{ litros}$$

El calor absorbido durante el proceso a→b será

$$Q_{a\to b} = n\,C_v(T_b - T_a) = \frac{p_a V_a}{RT_a} C_v(T_b - T_a) = \frac{10}{20'5}\cdot 21(500-250) = 2561 \text{ julios} =$$
$$= 614'64 \text{ cal.}$$

y durante el proceso b→c, teniendo en cuenta que $C_p = C_v + R$

$$Q_{b\to c} = n\,C_p(T_c - T_b) = \frac{10}{20'5}\cdot 29'3\,(650-500) = 2144 \text{ julios} = 514'56 \text{ cal.}$$

la temperatura en d, será

$$T_d = T_c \frac{p_d}{p_c} = 650\,\frac{2}{4} = 325^{\circ}K$$

el calor cedido durante el proceso $c \to d$, será

$$Q_{c \to d} = n\, C_v(T_d - T_c) = \frac{10}{20'5}\, 21\,(325 - 650) = -3329 \text{ julios} = -798'96 \text{ cal.}$$

y durante el proceso $d \to a$, será

$$Q_{d \to a} = n\, C_p(T_a - T_c) = \frac{10}{20'5}\, 29'3\,(250 - 325) = -1072 \text{ julios} = -257'28 \text{ cal}$$

el calor cedido durante el ciclo será

$$Q = -798'96 - 257'28 = -1056'24 \text{ cal}$$

=.=.=.=.=.=.=

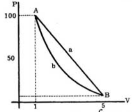
X-18. Un gas ideal, pasa del estado P = 100, V = 1 al P = 4 , V = 5 por dos procesos a y b,cuasiestáticos. Las unidades de P y V son arbitrarias.

El proceso, a, se define por la ecuación: $P = \dfrac{100}{V^2}$

el proceso, b,se define por la ecuación: P = 124-24V

1º) Representar ambos procesos en un diagrama P-V
2º) ¿Cuál es el trabajo dado, por mol, en cada proceso?
3º) Calcular ΔS en cada proceso.

****



1º) En la figura están representados los procesos:

a) $p = 124 - 24V$

b) $p\,V^2 = 100$

2º) En el proceso a, el trabajo será

$$W_a = \int p\,dV = 100 \int_1^5 \frac{dV}{V^2} = 100 \left[-\frac{1}{V}\right]_1^5 = 100 \left[1 - \frac{1}{5}\right] = 80$$

y en el proceso b

$$W_b = \int p\,dV = \int_1^5 (124 - 24V)\,dV = \left[124\,V - 12\,V^2\right]_1^5 = 208$$

3º) La transformación b es adiabatica y en consecuencia $\Delta S = 0$, ahora bien, la variación de entropía entre A y B es independiente del camino seguido y por consiguiente a lo largo del proceso, a , $\Delta S = 0$.

=.=.=.=.=.=.=

X-19. Un Kilo de agua a 10°tiene una densidad de 1 gr./cm^3. Si lo calentamos a presión constante hasta 50°, tiene una densidad de 0,9 gr./ /cm^3. Calcular la variación de energía interna que experimenta el sistema en la transformación. P = 1 At.

****

Apliquemos el 1º principio fundamental de la Termodinamica

$$U = Q - W$$

El calor suministrado al sistema valdrá

$$Q = 1000.1.\ (50-10) = 40.000 \text{ cal} = 167.200 \text{ julios}$$

El trabajo será

$$W = p(V_2 - V_1) = \frac{1}{0'9} - 1 = \frac{1}{9}\ \text{At} \times 1. = \frac{101,2}{9} \text{ julios} = 11'23 \text{ julios}$$

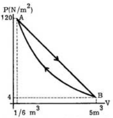
de donde

$$U = 167200 - 11'23 = 167188'77 \text{ julios}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-20. Un mol de gas ideal monoatómico sigue un ciclo reversible representado en el diagrama adjunto. Las transformaciones están regidas por las ecuaciones: $p = 124 - 24V$ y $pV = 20$, donde p y V se miden en $Nw.m^{-2}$ y m^3. Calcular: a) Trabajo desarrollado en un ciclo. b) Variación de energía interna y de entropía entre A y B. c) Rendimiento del ciclo.

****



a) Las coordenadas de los puntos A y B son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l} p = 124 - 24\ V \\ pv = 20 \end{array}\right\}$$

esta soluciones son:

$$\left\{\begin{array}{l} p_A = 120\,N/m^2, V_A = \frac{1}{6}\,m^3 \\ p_B = 4\,N/m^2\ , V_B = 5m^3 \end{array}\right.$$

el trabajo a lo largo de la transformación $A \to B$ será

$$W_{A \to B} = \int p\,dV = \int_{1/6}^{5} (124 - 24V)dV = \left[124V - 12V^2\right]_{1/6}^{5} = \frac{899}{3} = 299'6 \text{ julios}$$

a lo largo del camino $B \to A$ será

$$W_{B \to A} = \int p\,dV = 20 \int_5^{1/6} \frac{dV}{V} = 20\left[L\,V\right]_5^{1/6} = 20L\,\frac{1}{30} = -\,67'94 \text{ julios}$$

b) La variación de energía interna es nula, ya que la transformación $pV = 20 = K$ es una transformaciòn isoterma.

Teniendo en cuenta que en la transformación isoterma, $B \to A.$, se verifica $Q_{B \to A} = W_{B \to A}$, la variación de entropia será

$$S_A - S_B = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q_{B \to A}}{T} = \frac{W_{B \to A}}{T} = -\frac{67'94 \cdot 0'24}{\frac{20}{8'3}} \frac{cal}{^oK} = -6'767 \frac{cal}{^oK}$$

o también

$$S_B - S_A = 6'767 \frac{cal}{^oK}$$

c) El rendimiento será

$$\rho = \frac{W_u}{Q_s} = \frac{299'6 - 67'94}{299'6} = 0'77 = 77\%$$

=.=.=.=.=.=.=

X-21. Dos gases diferentes, supuestos perfectos, ocupan recipientes distintos y están a la misma presión y temperatura. Suponiendo constante la temperatura, calcular la variación de entropía del sistema cuando se ponen en comunicación ambos recipientes. Datos: n_1 = 1 mol, n_2 = 3 moles, ln 2 = 0'69, ln 3 = 1'095

****

Llamemos V_1 y V_2 a los volumenes de cada uno de los recipientes, el volumen final ocupado por cada gas será $V_1 + V_2$ y la variación de entropía de cada uno de los gases será:

$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{n_1 RT \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}}{T} = n_1 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$$

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T} = n_2 R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

pero

$$V_1 = \frac{n_1 R T}{p} \qquad y \qquad V_2 = \frac{n_2 R T}{p}$$

luego

$$\Delta S_1 = n_1 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_1} = 2 \ln 4 = 2'76 \quad cal/^oK$$

$$\Delta S_2 = n_2 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_2} = 3 \cdot 2 \ln \frac{4}{3} = 1'71 \quad cal/^oK$$

El incremento de antropía experimentado por el sistema será:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 2'76 + 1\ 71 = 4'47 \quad cal/^oK$$

=.=.=.=.=.=.=

X-22. Un mol de un gas perfecto, cuyo calor molar a volumen constante es C_v = 5 cal/mol^{o}K describe un ciclo de Carnot cuyo rendimiento es 0,5. Sabiendo que la expansión adiabática realiza un trabajo de 854 Kgm., hallar: 1º) Las temperaturas de los focos. 2º) La relación numérica entre los volúmenes ocupados por el gas al comenzar y finalizar la expansión adiabática. Nota: Tómese el valor de 427 Kgm/Kcal. para el equivalente mecánico del calor.

****

1º) Durante la expansión adiabática $Q = 0$ y por tanto,

$$-W = \Delta U = n\, C_v\, (T_2 - T_1) = -854 \text{ Kgm} = -2 \text{ Kc} = -2000 \text{ cal.}$$

luego

$$T_1 - T_2 = \frac{2000}{n\, C_v} = \frac{2000}{5} = 400 \qquad \text{(a)}$$

teniendo en cuenta que el rendimiento en un ciclo de Carnot es

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

obtenemos

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,5 \;\Rightarrow\; T_1 - T_2 = 0,5\; T_1 \qquad \text{(b)}$$

igualando las expresiones (a) y (b)

$$0,5\, T_1 = 400 \;\Rightarrow\; T_1 = 800^{\circ}\text{K} \quad \text{y} \quad T_2 = 400^{\circ}\text{K}$$

2º) En la expasión adiabática se verifica

$$T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 1} \;\Rightarrow\; \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = \frac{T_2}{T_1}$$

además

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{5 + 2}{5} = \frac{7}{5}$$

por tanto

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{7/5 - 1} = \frac{400}{800} = 1/2$$

o sea

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/5} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-23. Una habitación está llena de aire a presión constante debido a que una de las ventanas está abierta. La temperatura del aire aumenta por medio de una estufa eléctrica colocada en el interior de la habitación. Si admitimos que el aire se comporta como un gas perfecto, demostrar que su energía interna no varía.

****

Sean n_1 y n_2 el número de moles a las temperaturas T_1 y T_2 respectivamente.

La variación de energía interna al pasar de la temperatura T_1 a T_2 será

$$\Delta U = n_2 C_v T_2 - n_1 C_v T_1 = C_v(n_2 T_2 - n_1 T_1)$$

como el aire es un gas ideal a presión y volumen constante

$$\left.\begin{array}{l} p_o V_o = n_1 R T_1 \\ p_o V_o = n_2 R T_2 \end{array}\right\} \Rightarrow n_1 T_1 = n_2 T_2$$

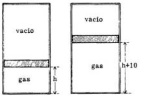
y, por tanto, $\Delta U = 0$, no existe variación de energía interna.

=.=.=.=.=.=.=

X-24. Un décimo de mol de un gas perfecto se encuentra en la parte inferior del recipiente de la figura, el pistón tiene una superficie de 50 cm^2 y pesa 100 Kg, se encuentra el pistón a una altura h, la temperatura inicial es 273°K. Se calienta el gas y sube el pistón 10 cm. Calcular la altura h, la temperatura final, variación de energía interna y calor suministrado. Tómese: C_v = 5 cal/mol°K; 1 At = 1 Kg/cm^2.

****

El gas encerrado en la parte inferior del recipiente, se encuentra a una presión constante cuyo valor es



$$p = \frac{P}{S} = \frac{100}{50} = 2 \text{ Kg/cm}^2 = 2 \text{ At.}$$

Calculemos el volumen ocupado inicialmente, por el gas

$$V = \frac{n R T}{p} = \frac{0,1 \times 0,082 \times 273}{2} = 1,1193 \text{ litros}$$

la altura h será

$$h = \frac{V}{S} = \frac{1119,3}{50} = 22,386 \text{ cm.}$$

como el gas se calienta a presión constante, se verifica

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} \Rightarrow T' = T\frac{V'}{V} = 273\,\frac{32,386}{22,386} = 394,9^{o}\text{K}$$

la variación de energía interna es:

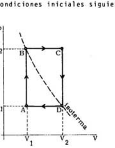
$$\Delta U = n\,C_v(T'-T) = 0,1\cdot 5(394,9-273) = 60.95 \text{ cal} = 254.77 \text{ julios}$$

el calor suministrado, como $C_p = C_v + R = 5 + 2 = 7$ cal/mol°K, será

$$Q = n\ C_p(T'-T) = 0'1 \cdot 7(394,9-273) = 85,33 \text{ cal.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-25. Una cierta masa de gas se encuentra encerrada en un pistón en las condiciones iniciales siguientes: $P_1 = 1$ Atm., $V_1 = 0{,}010\ m^3$, $T_1 = 273°K$, punto A en el diagrama de Clapeyron. Se le somete al gas a una serie de transformaciones representadas en la figura por el rectángulo ABCD. La ordenada de B es $P_2 = 2p_1$, la abscisa de D es $V_2 = 2V_1$. Se pide



1º) Calcular el trabajo realizado por el gas en el transcurso del ciclo ABCD.

2º) Determinar la temperatura del aire en los estados B, C y D.

3º) Calcular las cantidades de calor intercambiadas durante las transformaciones AB, BC, CD, DA.

4º) Deducir, a partir de los resultados precedentes, el equivalente mecánico de la caloría.

Calor especifico del aire a presión constante: $0{,}237\ Kcal \cdot Kg^{-1} \cdot °K^{-1}$, $\gamma = 1{,}42$

Densidad del aire en condiciones normales: $1{,}293\ Kg/m^3$.

****

1º) El trabajo a lo largo del ciclo ABCD es el area del rectángulo representado

$$W = (p_2-p_1)(V_2-V_1) = 10 \text{ Atm} \cdot 1. = 1012 \text{ julios}$$

2º) Como la transformación AB es isocora, se verifica

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \qquad \text{o sea} \qquad T_B = T_A \frac{p_B}{p_A} = 546°K$$

por ser BD isoterma $\qquad T_D = T_B = 546°K$

$$\text{analogamente} \quad \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \qquad \text{y} \qquad T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = 1092°K$$

3º) El calor intercambiado en la transformación AB, será

$$Q_{AB} = m\ C_v(T_B-T_A) = 0{,}01293 \cdot \frac{0.237}{1.42}(546-273) = 0{,}586 \text{ Kcal.}$$

en las transformaciones BC, CD, DA los calores intercambiados serán:

$$Q_{BC} = m\,C_p(T_C-T_B) = 0{,}01293\cdot 0{,}237\,(1092-546) = 1.674 \text{ Kcal.}$$

$$Q_{CD} = m\,C_v(T_D-T_C) = 0{,}01293\cdot \frac{0{,}237}{1{,}42}\,(546-1092) = -1{,}172 \text{ Kcal.}$$

$$Q_{DA} = m\,C_p(T_A-T_D) = 0{,}01293\cdot 0{,}237(273-546) = -0{,}837 \text{ Kcal.}$$

El trabajo total a lo largo del ciclo es: W = 1012 julios

El calor intercambiado a lo largo del ciclo completo es:

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 586+1674-1172-837 = 251 \text{ cal.}$$

de donde

$$J = \frac{W}{Q} = \frac{1012}{251} = 4{,}02\ \frac{\text{julios}}{\text{cal.}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-26. El ciclo de una máquina térmica equivale a uno de Carnot reversible en el que la temperatura del refrigerante es de 27°C, el rendimiento 0,6 y el calor que se cede al foco frío es 20 Kc. en cada minuto. Calcular: 1°) La temperatura de la caldera 2°) Potencia de la máquina en C.V.

****

1º) El rendimiento de un ciclo de Carnot está dado por; $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

en nuestro caso:

$$0'6 = 1 - \frac{300}{T_1}$$

de donde $T_1 = \frac{300}{0'4} = 750^oK$

2º) Conocida la relación $\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$

obtenemos $Q_1 = Q_2\,\frac{T_1}{T_2} = 20\,\frac{750}{300} = 50$ Kc/m.

la potencia valdrá

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Q_1-Q_2}{t} = \frac{30}{60} = 0'5 \text{ Kc/s} = \frac{0'5.427}{75} = \underline{2'85 \text{ C.V}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-27. Una máquina térmica reversible funciona entre tres niveles térmicos de temperaturas: $T_1 = 500^oK$, $T_2 = 400^oK$ y $T_3 = 300^oK$. Toma del foco T_1 la cantidad de calor Q_1 = 700 Kal. y realiza un trabajo de 1 Kw-hora. Calcular: 1°) Las cantidades de calor tomadas o cedidas en los otros dos focos. 2°) El rendimiento del ciclo. 3°) Los incrementos de entropía en los distintos niveles térmicos y el incremento de entropía del universo.

Dato: 1 julio = 0,24 cal.

****

1º) Sean Q_1, Q_2 y Q_3 los calores tomados o cedidos por los tres focos. Como a lo largo del ciclo reversible $\Delta U = 0$, tendremos

$$W = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1\,\text{Kw-h} = 864\ \text{Kc}$$

Analogamente $\Delta S = 0$, luego

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} Q_2 + Q_3 &= 164 \\ \frac{700}{500} + \frac{Q_2}{400} + \frac{Q_3}{300} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ o sea } \qquad \begin{aligned} Q_2 + Q_3 &= 164 \\ 3Q_2 + 4Q_3 &= -1680 \end{aligned}$$

Sistema cuyas soluciones son:

$$Q_2 = 2336\ \text{Kcal.} \qquad Q_3 = -2172\ \text{Kcal.}$$

2º) El rendimiento será

$$\eta = \frac{W}{Q_s} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_2} = 1 + \frac{Q_3}{Q_1 + Q_2} = 1 - \frac{2172}{700+2336} = 1 - 0,715 = 0,285$$

3º) La variación de entropía en cada uno de los niveles es

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{700}{500} = 1,4\ \text{Kcal./oK}$$

$$\Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{2336}{400} = 5,84\ \text{Kcal./}^{\circ}\text{K}$$

$$\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_3} = -\frac{2172}{300} = -7,24\ \text{Kcal./}^{\circ}\text{K}$$

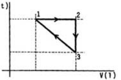
La variación de entropía del universo ha de ser nula ya que la máquina funciona reversiblemente

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 1,4 + 5,84 - 7,24 = 0$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-28. Tenemos medio mol de gas biatómico a 2 litros y 6 atmósferas (estado 1); mediante un proceso isóbaro se lleva hasta que su volumen es doble (estado 2); después se le comprime isócoramente hasta que su presión se hace igual a la mitad (estado 3); finalmente mediante un proceso cuya representación en el diagrama PV es una línea recta pasa de nuevo a 1. Calcular:

a) Valor de las variables termodinámicos (P,V,T) en los estados 2 y 3



b) Intercambio de calor y de trabajo en cada proceso, con su signo, indicando el sentido físico de este.

c) Rendimiento

d) Variación total de la entropía y en cada proceso.

Tomese R = 0,08 at.l/mol^{o}K

a) La temperatura en el estado 1 es

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{n R} = \frac{2 \times 6}{0,5 \times 0,08} = 300^{o}K$$

Las variables termodinámicas en el estado 2, son

$$p_2 = p_1 = 6\,At \;;\quad V_2 = 2V_1 = 4 \text{ litros} \;;\quad T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 300 \times 2 = 600^{o}K$$

y en el estado 3

$$p_3 = \frac{p_1}{2} = 3\,At. \;;\quad V_3 = V_2 = 4 \text{ litros} \;;\quad T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_2} = \frac{600}{2} = 300^{o}K$$

de estos valores se deduce que 1 y 3 están en la misma isoterma

b) El calor y trabajo intercambiados a lo largo del proceso 1-2, son

$$Q_{12} = n\,C_p\,(T_2 - T_1) = 0,5.7\,(600-300) = 1050 \text{ cal.} = 4388 \text{ julios}$$

por ser el gas biatómico $\quad C_v = \frac{5}{2}R \quad$ y $C_p = C_v + R = \frac{7}{2}R = 7$ cal/mol^{o}K

$$W_{12} = p_1\,(V_2 - V_1) = 6\,(4-2) = 12\,At \times l = 12 \times 101,2 = 1214,4 \text{ julios}$$

Durante este proceso el sistema realiza trabajo y se le suministra calor

El calor y trabajo intercambiados en el proceso 2-3, son

$$Q_{23} = n\,C_v (T_3 - T_2) = 0,5 \times 5\,(300-600) = -750 \text{ cal.} = 3135 \text{ julios}$$

este calor es cedido durante la transformación

$$W_{23} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad dV = 0$$

El trabajo total a lo largo del ciclo completo es

$$W = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_3) = \frac{1}{2}(6-3)(4-2) = 3\,At \times l = 303,6 \text{ julios}$$

el trabajo a lo largo del proceso 3-1 es

$$W_{31} = W - W_{12} - W_{23} = 3\text{-}12 = -9 \text{ At} \times 1 = -910 \text{ julios (trabajo suministrado al gas)}$$

Como 1 y 3 están en la misma isoterma $\Delta U = 0$ y, por tanto

$Q_{31} = W_{31} = -910$ julios $= -218,4$ cal. calor cedido durante el proceso

c) Rendimiento

$$\eta = \frac{W}{Q_s} = \frac{303,6}{4389} = 0,69 = 69\%$$

d) La variación total de entropía a lo largo del ciclo es $\Delta S = 0$

A lo largo del proceso 1-2, será

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = n\ C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = n\ C_p\ L\ \frac{T_2}{T_1} = 0,5 \times 7 \times 0,69 = 2,315 \text{ cal/}^{\circ}\text{K}$$

de 2 a 3

$$\Delta S_{23} = n\ C_v\ L\ \frac{T_3}{T_2} = 0'5 \times 5 \times L\ \frac{1}{2} = -0,5 \times 5 \times 0,69 = -1,725 \text{ cal/}^{\circ}\text{K}$$

Como $\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = 0$

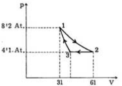
$$\Delta S_{31} = -\Delta S_{12} - \Delta S_{23} = -2,315 + 1,725 = -0,59 \text{ cal/oK}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.

X-29. Un mol de un gas diatómico se encuentra a 300°K ocupando un volumen de 3 l. Se expansiona isotérmicamente hasta que su volumen es doble, a continuación se le enfría isobáricamente hasta un cierto estado a partir del cual sigue un proceso adiabático que le devuelve a su posición inicial. Calcular:

a) El valor de las variables termodinámicas (P, V, T) en los estados segundo y tercero.
b) El intercambio de calor y trabajo en cada proceso del ciclo (con su signo). Interpretar físicamente el signo.
c) Rendimiento del ciclo.
d) Variación de la energía interna experimentada por el sistema al recorrer el ciclo completo.

****



a) La presión en el estado 1, será

$$P_1 = \frac{RT}{V_1} = \frac{0,082.300}{3} = 8'2 \text{ At.}$$

la transformación $1 \to 2$, es isoterma, luego $T_2 = 300^{\circ}$K y además $V_2 = 2V_1 = 6$ l.

por tanto $P_2 = P_1 \dfrac{V_1}{V_2} = 8'2\ \dfrac{3}{6} =$

$p_2 = 4'1$ At.

como $2 \rightarrow 3$ es isobárica $p_3 = p_2 = 4'1$ At.

al ser el gas diatómico, $C_p = \frac{7}{2}R$, $C_v = \frac{5}{2}R$ y $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1'4$

además la transformación $3 \rightarrow 1$ es adiabática, luego

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_3 \ V_3^{\gamma}$$

o sea

$$V_3^{\gamma} = \frac{p_1}{p_3} \ V_1^{\gamma}$$

y

$$V_3 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{1/\gamma} = 3 \cdot 2^{1/\gamma} = 4'86 \text{ l.}$$

luego

$$T_3 = T_2 \ \frac{V_3}{V_2} = 300 \ \frac{4'86}{6} = 243^{\circ}\text{K}$$

b) El trabajo a lo largo del proceso $1 \rightarrow 2$, valdrá

$$W_{1 \rightarrow 2} = n R T \cdot L \frac{V_2}{V_1} = 8'31 \cdot 300 \ L \frac{6}{3} = 8'31 \cdot 300 \cdot 0'69 = 1720'17 \text{ julios}$$

y el calor

$$Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} = 1720'17 \cdot 0'24 = 412'83 \text{ cal.}$$

durante este proceso hemos obtenido trabajo a expensas del calor suministrado

El trabajo durante el proceso $2 \rightarrow 3$, valdrá

$$W_{2 \rightarrow 3} = p(V_3 - V_2) = 4'1\,(4'86-6) = -4'674 \text{ At. l} = -\ 4'674 \cdot 101'3 = -473'47 \text{ julios}$$

y el calor

$$Q_{2 \rightarrow 3} = n \ C_p(T_3 - T_2) = 1 \cdot \frac{7}{2}R(243-300) = -\ 7 \cdot 57 = -399 \text{ cal.}$$

en este proceso hemos suministrado trabajo y se ha desprendido calor

El trabajo en el proceso $3 \rightarrow 1$, será

$$W_{3 \rightarrow 1} = \frac{p_1 V_1 - p_3 V_3}{1 - \gamma} = \frac{8'2 \cdot 3 \ - \ 4'1 \cdot 4'86}{1 - 1,4} = -\ 11'685 \text{ At x l.} = -\ 1 \cdot 183'69 \text{ julios}$$

como es proceso adiabático $\qquad Q_{3 \rightarrow 1} = 0$

c) El rendimiento será

$$\rho = \frac{W_u}{Q_s} = \frac{1720'17 - 473'47 - 1183'69}{1720'17} = 3'7\,\%$$

d) La variación de energía interna total es igual a cero.

=.=.=.=.=.=.=

X-30. Un hombre lleva puesta una camiseta de lana y la temperatura de su piel es de 30°C. Calcular la pérdida de calor por minuto y m^2 de superficie de dicho hombre, cuando se encuentra en un lugar cuya temperatura ambiente es de 10°C.

Datos: Espesor de la camiseta. e = 5mm.
Conductividad térmica de la lana. K = 42 cal/m h °C

****

La cantidad de calor que atraviesa una superficie S, en un tiempo t,viene dada por la expresión

$$Q = K\,S\,\frac{\theta_2 - \theta_1}{e}\,t$$

Teniendo en cuenta que en este caso: $t = \frac{1}{60}$ h, $S = 1\ m^2$ y $e = 5\ 10^{-3}$m.

$$Q = 42\,\frac{30-10}{5\ 10^{-3}}\,\frac{1}{60} = 2800 \text{ cal.}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-31. A una lámina de acero de espesor e_1 = 2 cm. se le superpone otra lámina de aluminio de espesor e_2 = 7 cm. Si la superficie exterior del acero se mantiene a θ_1= 100°C y la superficie exterior del aluminio se mantiene a θ_2= 20°C. ¿Cuál será la temperatura en la superficie común a las dos láminas.? ¿Cuál será el calor que se propaga por cm^2 a través de la doble lámina en 2 minutos?

Conductividad térmica del acero k_1 = 0'12 cal/seg cm °C.
Conductividad térmica del aluminio k_2 = 0'49 cal/seg cm °C

****

Llamamos θ a la temperatura de la superficie común. Cuando se alcanza el régimen estacionario, el flujo de calor a través de los dos materiales será el mismo, o sea

$$K_1\,S\,\frac{\theta_1 - \theta}{e_1} = K_2\,S\,\frac{\theta - \theta_2}{e_2}$$

sustituyendo valores

$$0'12\,\frac{100-\theta}{2} = 0'49\,\frac{\theta-20}{7} \Rightarrow \theta = 56'92\ ^\circ C$$

La cantidad de calor que se transmite a través de la doble lámina, en 2 minutos, será

$$Q = 0'12\,\frac{100 - 56'92}{2}\,2\cdot 60 = 310'176 \text{ cal.}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-32. En una medida de metabolismo basal, un paciente exhala durante 6 minutos, un volumen V_1 = 52'5 litros de aire, medidos sobre agua a 20°C.

La tensión del vapor de agua a esta temperatura es de 17'5 mm de Hg y la presión atmosférica era de 750 mm de Hg. El aire exhalado contenía un 16'75% de su volumen de oxígeno, mientras que el aire inhalado contenía un 20'32% de volumen de oxígeno. Despreciando la solubilidad de los gases en el agua y la diferencia entre los volúmenes totales de aire inhalado y exhalado, calcular la velocidad de consumo de oxígeno por el paciente en cm^3 por minuto a 0^oC y 760 mm.

****

La presión del aire seco contenido en los V_1 litros es: p_1 = 750-17'5 = = 732'5 mm. de Hg. El volumen V_2 de aire exhalado a 0^oC y 760 mm de Hg, es:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = V_1\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} = 52'5\cdot\frac{732'5}{760}\cdot\frac{273}{293} = 47'1 \text{ l.}$$

La velocidad de consumo de oxígeno es:

$$v = \frac{\frac{20'32}{100}v_2 - \frac{16'75}{100}v_2}{t} = \frac{47'1\cdot(0'2032-0'1675)}{6} = 0'280 \text{ l/min} = 280 \text{ cm}^3\text{/min}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-33. Un neumático de una motocicleta de volumen 10 litros se llena de aire a una presión absoluta de 3 atmósferas a 27^oC. Después de una marcha de varias horas la temperatura del neumático es de 57^oC, y el volumen se supone invariable.

a) Calcular la presión que existe entonces en el interior del neumático.

b) ¿Cuál sería el volumen del gas si el incremento de la presión se hubiera realizado sin variar la temperatura?

c) ¿Qué número de moléculas de aire habría que extraer a 57^oC para que la presión volviera a ser la inicial (supuesto el aire un gas homogéneo de peso molecular medio 28'8)?

Datos: R = 0'082 l atm/mol ^oK; número de Avogadro, $6'02\cdot10^{23}$ molléc/mol

****

a) A volumen constante, se verifica

$$\frac{P}{T} = \frac{P'}{T'} \Rightarrow P' = P\cdot\frac{T'}{T} = 3\cdot\frac{273+57}{273+27} = 3'3 \text{ At.}$$

b) Si la temperatura no varía

$$P\cdot V = P'\cdot V' \Rightarrow V' = V\cdot\frac{P}{P'} = 10\cdot\frac{3}{3'3} = 9'09 \text{ litros}$$

c) Sea Δn el exceso de moléculas debido al aumento de presión Δp, tendremos

$$\Delta p\cdot V = \frac{\Delta n}{N}RT$$

de donde

$$n = \frac{\Delta p \cdot V \cdot N}{R \cdot T} = \frac{(3'3-3) \cdot 10 \cdot 6'02 \cdot 10^{23}}{0'082 \cdot (273+57)} = 6'69 \cdot 10^{22} \text{ moléculas}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-34. En un recinto vacío de volumen 20 cm^3 se introduce 1 mg de gas hidrógeno a 17°C. A continuación se disminuye la temperatura a 10°C y se hace un vacío parcial hasta reducir su presión a la centésima parte de su valor inicial.

a) ¿Qué valores tenían en mm de Hg la presión inicial y final del recinto?

b) ¿Qué cantidad de hidrógeno fué extraída del recinto?

c) ¿Cuántas moléculas de hidrógeno fueron extraídas?

(Número de Avogadro, 6'02 10^{23} moléculas/mol; R = 0'082 at.l/mol.°K)

****

a) Apliquemos la ecuación de los gases perfectos al hidrógeno, obtendremos:

$$p_1 \cdot V = n \cdot R \cdot T_1 \Rightarrow p_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{V} = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{M \cdot V} = \frac{10^{-3} \cdot 0'082 \cdot 290}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 0'59 \text{ At.}$$

La presión inicial en mm. de Hg será

$$p_1 = 0'59 \cdot 760 = 448'4 \text{ mm. de Hg.}$$

La presión en el interior del recinto, cuando se disminuye la temperatura a 10°C, es

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 448'4 \cdot \frac{283}{290} = 437'5 \text{ mm de Hg.}$$

Después de hacer el vacío parcial, la presión es

$$p_3 = \frac{p_2}{100} = \frac{437'5}{100} = 4'375 \text{ mm. de Hg}$$

b) Se habrá extraido la cantidad de hidrógeno correspondiente a la pérdida de presión: Aplicando nuevamente la ecuación de los gases perfectos, obtendremos:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \qquad (p_2 - p_3)V = \frac{m_e}{M} \cdot R \cdot T$$

luego

$$m_e = \frac{V(p_2-p_3)M}{R \cdot T} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot (437'5 - 4'375) 2}{760 \cdot 0'082 \cdot 283} = 10^{-3} \text{ gr.}$$

c) El número de moles extraídos es

$$n = \frac{m_e}{M} = \frac{10^{-3}}{2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ moles de } H_2$$

y el número de moléculas extraídas será

$$n = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 6'02 \cdot 10^{27} = 30 \cdot 10^{19}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-35. Dada la ecuación de Van der Waals para un mol de substancia:

$$(p + \frac{a}{v^2})(v-b) = RT$$

a) Establézcase la forma de dicha ecuación para n moles.

b) Calcúlese la presión que ejercerán 1000g. de CO_2 confinados en un volumen de 7 litros, a la temperatura de 57°C. Las constantes de la ecuación de Van der Waals para dicha substancia valen:

$$a = 3'61 \text{ atm } l^2/\text{mol}; \quad b = 0'043 \text{ l/mol}$$

c) Compárese la presión obtenida con la que resultaría al considerar el CO_2 como gas perfecto.

Datos: Masas atómicas; C = 12; O = 16; R = 0'082 atm.l/mol.°K

****

a) Cuando se trate de n moles V = n v, de donde

$$\left[p + \frac{a}{V^2/n^2}\right]\left[\frac{V}{n} - b\right] = R\cdot T \Rightarrow \left[p + \frac{a\,n^2}{V^2}\right]\left[V - n\,b\right] = n\cdot R\cdot T$$

que es la ecuación de Van der Waals para n moles

b) Despejando p de la fórmula anteriormente obtenida, tendremos

$$p = \frac{n\cdot R\cdot T}{V-n\cdot b} - \frac{a\cdot n^2}{V^2} = \frac{\frac{1000}{44}\cdot 0'082\cdot 330}{7-\frac{1000}{44}\cdot 0'043} - \frac{3'61\left[\frac{1000}{44}\right]^2}{49} = 64'06 \text{ At.}$$

c) Si consideramos el CO_2 como gas perfecto, obtenemos:

$$p' = \frac{n\cdot R\cdot T}{V} = \frac{\frac{1000}{44}\cdot 0'082\cdot 330}{7} = 87'85 \text{ At.}$$

la relación de las presiones obtenidas en uno y otro caso, será:

$$r = \frac{p'}{p} = \frac{87'85}{64'06} = 1'35$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-36. Calcular la velocidad cuadrática media de una molécula de hidrógeno a la temperatura de 20°C, en un recinto donde la presión es 70 cm. de mercurio. Peso molecular del hidrógeno = 2'016 g/mol

****

La densidad del hidrógeno en condiciones normales, es:

$$\rho_o = \frac{2'016\cdot 10^{-3}}{22'4\cdot 10^{-3}} = 0'09 \text{ Kg/m}^3$$

La densidad del hidrógeno a T = 293 °C y p = 70 cm. de Hg, será

$$\rho = \rho_o \frac{T_o}{T}\cdot\frac{p}{p_o} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p_o}{\rho_o}\cdot\frac{T}{T_o}$$

La presión de un gas en un recinto es debida a los choques de las moléculas contra las paredes del recinto. La presión viene dada por la expresión

$$p = \frac{1}{3}\,\rho\,\bar{v}^2$$

de donde

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3p_o}{\rho_o}\cdot\frac{T}{T_o}}$$

como p_o = 76 cm. de Hg = 1'033 Kp/cm^3 = 1'013·10^5 N/m^2

Tendremos

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3\cdot 1'013\cdot 10^5}{0'09}\cdot\frac{293}{273}} = 1900 \text{ m s}^{-1}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-37. Se tiene un mol de oxígeno a 25^{o}C y 770 mm de Hg de presión. Calcúlese:

a) Su densidad absoluta en g/l.

b) La velocidad media de agitación de sus moléculas.

c) El número de átomos de oxígeno que contendrá.

****

a) Aplicando la ecuación de los gases perfectos, tendremos

$$p\ V = n\cdot R\cdot T = \frac{m\cdot R\cdot T}{M}$$

como

$$\rho = \frac{m}{V}$$

nos quedará

$$\rho = \frac{p\cdot M}{R\cdot T} = \frac{\frac{770}{760}\cdot 32}{0'082\cdot 298} = 1'3 \text{ g/l.}$$

b) La energía cinética media de las moléculas es:

$$Ec = \frac{3}{2}\cdot\frac{R}{N}\,T$$

y, además

$$Ec = \frac{1}{2}\,m\cdot v^2$$

tendremos

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{R}{N}\cdot T = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{N}\cdot v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{3\ R\ T}{M}}$$

sustituyendo valores

$$v = \sqrt{\frac{3\cdot 8'31\cdot 10^7\cdot 298}{32}} = 4'8\cdot 10^4 \text{ cm s}^{-1}$$

c) Como nos dan un mol de oxígeno, el número de moléculas será

$$n_M = 6'02\cdot 10^{23}$$

y el número de átomos de oxígeno, será

$$n_A = 2 \; 6'02 \; 10^{23} = 12'04 \; 10^{23}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-38. Se tienen 56 gr. de nitrógeno (peso molecular = 28) que están a una temperatura de 27^{o}C. Se pide calcular:

a) La energía cinética total de sus moléculas. (R = 8 julios/mol^{o}K)

b) Si esa energía cinética se convirtiera totalmente en trabajo en 30 seg. ¿Cuántos caballos de vapor desarrollaría?

c) Suponiendo que la masa de nitrógeno ocupa un volumen de 10 litros a la citada temperatura. ¿Qué presión ejercerá?

****

a) Teniendo en cuenta que un gas biatómico tiene 5 grados de libertad, la energía cinética será

$$Ec = \frac{5}{2} n \; R \; T = \frac{5}{2} \frac{m}{M} R \; T = \frac{5}{2} \frac{56}{28} 8 \cdot 300 = 12000 \text{ julios}$$

b) La potencia en caballos de vapor, será

$$P = \frac{Ec}{t} = \frac{12000}{30 \cdot 9'8 \cdot 75} = 0'54 \text{ C. V}$$

c) Aplicando la ecuación de los gases perfectos

$$p \; V = n \; R \; T \;\Rightarrow\; p = \frac{n \; R \; T}{V} = \frac{m \; R \; T}{M \; V}$$

sustituyendo valores

$$p = \frac{56 \cdot 0'082 \cdot 300}{28 \cdot 10} = 4'92 \text{ At.}$$

=.=.=.=.=.=.=

X-39. Un tubo barométrico tiene una sección interior constante de s = = 4 cm^{2} y está colocado vertical e invertido sobre una cubeta que contiene mercurio. La altura de la columna de mercurio en el tubo es de H = = 702,5 mm. desde el nivel de la cubeta, y la altura de la cámara barométrica en el tubo, o espacio situado por encima del mercurio, es l = = 320 mm. Se hunde un poco el tubo en la cubeta, con lo que las alturas anteriores se convierten en H' = 70 cm. y l' = 30 cm. respectivamente. La temperatura es constantemente de 0^{o} y se pide:

a) La presión atmosférica P, en cm. de mercurio, y la masa de aire m, en mg que contiene la cámara barométrica del tubo.

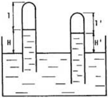
b) Estando el tubo en la segunda posición de las dos expresadas, antes, se introduce en la cámara barométrica un líquido volátil que se evapora completamente, y el mercurio desciende hasta alcanzar el mismo nivel que en la cubeta. Calcular en mg. la masa m' del líquido que se introdujo, siendo d = 1,9 la densidad del vapor respecto del aire.

Densidad del aire en condiciones normales ρ = 0,0013 g/ cm^{3}. Se despreciará la presión del vapor de mercurio, así como las variaciones del nivel del mercurio en la cubeta

****

a) Llamemos p y p' a las presiones del aire encerrado en la cámara barométrica en cada una de las posiciones del tubo, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} H + p = H' + p' = P \\ p\, l = p'\, l' \end{array}\right\}$$



o sea

$$\left.\begin{array}{l} p' - p = H - H' = 2,5 \\ \frac{p'}{p} = \frac{320}{300} = \frac{16}{15} \end{array}\right\}$$

$$p' = 40 \text{ mm Hg}$$

$$p = 37,5 \text{ mm Hg}$$

la presión atmosférica será

$$P = H + p = 702,5 + 37,5 = 740 \text{ mm Hg} = 74 \text{ cm. Hg}$$

y la masa del aire

$$m = V\,\rho\,\frac{p}{P} = 4\cdot 32\cdot 1,3\,\frac{37,5}{740} = 8,43 \text{ mg.}$$

b) La suma de la presión del aire encerrado y de la tensión del vapor f es igual a la presión atmosferica

$$p'' + f = P = 740$$

la presión del aire será

$$p'' = \frac{p'\,l'}{l''} = \frac{40\cdot 30}{100} = 12 \text{ mm Hg.}$$

y la tensión del vapor

$$f = 740 - 12 = 728 \text{ mm Hg.}$$

la masa del vapor será

$$m' = V\cdot 1,3d\,\frac{f}{p} = 4\cdot 100\cdot 1,3\cdot 1,9\,\frac{728}{740} = 972 \text{ mg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

X-40. Un tubo barométrico está colocado vertical e invertido sobre una cubeta que contiene mercurio. La altura que sobresale de la cubeta es a = 80 cm. y la mitad de esta altura contiene aire seco. Introducimos la cantidad de agua suficiente para saturar el aire de humedad. Calcular
a) Relación entre la masa de aire húmedo y la de aire seco encerrados en la cámara
a) La altura que descenderá el mercurio en el tubo.
b) Relación entre la masa de aire húmedo y la de aire seco encerrados en la cámara.
Presión atmosférica del vapor de agua en las condiciones del problema.

****

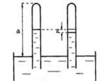
a) El aire ocupa, inicialmente, una altura $h = \frac{a}{2} = 40$ cm. y su presión p es $p = H - 40 = 76 - 40 = 36$ mm Hg.

Si llamamos z a la altura que desciende el mercurio, al introducir el agua, la altura ocupada por el aire es: $h' = 40 + z$, y la presión total en el interior de la cámara barométrica llena de aire saturado es

$$p_T = p' + f = 76 - (40 - z)$$

de donde

$$p' = 76 - 40 + z - 9 = 27 + z$$



Aplicando la ley de Boyle - Mariotte al aire seco encerrado en la cámara, tendremos

$$p\ h = p'\ h' \Rightarrow 40 \cdot 36 = (40 + z)(27 + z)$$

de donde $$z^2 + 67z - 360 = 0$$

$$\boxed{z = 5\ \text{cm.}}$$

b) La masa de aire seco es

$$m_s = V \cdot \rho \cdot \frac{p}{76} \cdot \frac{273}{273 + t} = V \cdot \rho \cdot \frac{32}{76} \cdot \frac{273}{273 + t}$$

la masa de vapor de agua

$$m_v = V \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{9}{76} \cdot \frac{273}{273 + t}$$

la masa de aire húmedo será

$$m_h = m_s + m_v = V \cdot \rho \cdot \left[\frac{32}{76} + \frac{45}{8\ 76} \right] \frac{273}{273 + t}$$

de donde

$$\frac{m_h}{m_s} = \frac{32 + \frac{45}{8}}{32} = \underline{1,175}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

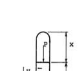
X-41. Calcular la masa de aire seco contenido en un tubo barométrico de sección interior 1 cm² sabiendo que el Hg se eleva en este tubo las alturas h = 4 cm. y h' = 2 cm., cuando la presión atmosférica sea 85 cm. y H' = 74 cm. respectivamente.

****

Igualando presiones en la superficie libre.

$P + h = H \qquad P = 85 - 4 = 81$ cm.

$P' + h' = H' \qquad P' = 74 - 2 = 72$ cm.



Aplicando la ley de los gases perfectos a ambas experiencias.

$$P \cdot s \cdot x = P' \cdot s\ (x + 2)$$

$$x = \frac{2\ P'}{P - P'} = \frac{144}{9} = 16\ \text{cm.}$$

por tanto el volumen que ocupa el aire a presión P es : $V = s \cdot x = 16\ cm^3$

Aplicando la formula del peso de un gas :

$$P = 0,001293 \cdot 16 \cdot \frac{81}{76} = 0,022601\ gr. \qquad \underline{P = 22,601\ mgrs.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

X-42. El agua de un lago tiene una temperatura de 0^oC. La temperatura del aire que lo rodea es de -10 ^oC. Calculese el espesor de la capa de hielo que se ha formado al cabo de 24 horas, contadas desde el instante en que el agua empezó a helarse.

Conductividad térmica del hielo 0,0053 cal/^oC seg cm.

Densidad del hielo 0,90 gr cm^{-3}.

Calor latente de fusión del hielo C = 80 cal/gr.

****

Consideramos el instante en que la capa de hielo tenga un espesor x ; la cantidad de calor, dQ, que pasará del agua al aire en un tiempo dt, es

$$dQ = -K \cdot \frac{\theta}{x} \cdot dt \qquad \text{siendo} \qquad s = 1$$

con esta cantidad de calor se forma una capa de hielo de espesor dx y s = 1 tal que

$$dQ = C \cdot \rho \cdot dx$$

igualando ambas expresiones y despejemos dt

$$- dt = \frac{C \cdot \rho}{K \cdot \theta} \cdot x \cdot dx$$

e integremos

$$\int_0^t dt = \frac{C \cdot \rho}{K \cdot \theta} \int_0^l x \cdot dx \Rightarrow -t = \frac{C \cdot \rho}{K \cdot \theta} \cdot \frac{l^2}{2}$$

$$l = \sqrt{-\frac{2 \cdot K \cdot \theta \cdot t}{C \cdot \rho}} = \sqrt{-\frac{2 \cdot 0,0053 \cdot (-10) \cdot 24 \cdot 3600}{80 \cdot 0,90}} = \underline{\underline{11,2\ cm.}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XI

MOVIMIENTO ONDULATORIO

XI-1. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es $y = 25 \cdot \operatorname{sen} \pi\,(0{,}80t-1{,}25x)$ donde x se expresa en cm. y t, en segundos. Determinar la amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de la onda. Determinar la velocidad transversal de un punto sobre dicha cuerda.

***-----**

La ecuación de una onda tranversal, en general, es

$$y = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

la ecuación dada en el problema se puede poner de la forma siguiente

$$y = 25 \text{ sen } 2\pi\left[\frac{t}{\frac{1}{0,40}} - \frac{x}{\frac{2}{1,25}}\right]$$

identificando ambas ecuaciones obtendremos:

amplitud $\qquad A = \underline{25 \text{ cm.}}$

longitud de onda $\qquad \lambda = \frac{2}{1'25} = \underline{1,6 \text{ cm.}}$

frecuencia $\qquad f = \frac{1}{T} = \underline{0,40 \text{ ciclos/seg.}}$

velocidad de propagación $\qquad v = \frac{\lambda}{T} = \underline{0,64 \text{ cm/seg.}}$

La velocidad transversal será

$$v_t = \frac{dy}{dt} = 25\ 0,8\pi\ \cos\pi(0,80t-1,25x) = 20\pi\cos\pi(0,80t-1,25x) \text{ cm/seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XI-2. Dos trenes de ondas, de igual longitud de onda λ = 36 cm. e igual velocidad se propagan en igual dirección con una diferencia de marcha de δ= 12 cm. ¿Cuánto vale en el tiempo t = T/2, la elongación de un punto, cuya distancia al origen de la primera onda es 3 cm, suponiendo que ambas amplitudes valen 1 cm.?

****

El primer tren de ondas viene dado por

$$y_1 = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

y el segundo tren de ondas por

$$y_2 = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right)$$

la acción conjunta de ambos trenes de ondas dará lugar a una perturbación que vendrá expresada por la suma algebraica de ambas. Tendremos

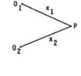
$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{\pi\delta}{\lambda} \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+\delta/2}{\lambda}\right) =$$

$$= 2 \cos \frac{12}{36}\pi \text{ sen } 2\pi\left(\frac{T/2}{T} - \frac{3+6}{36}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} \text{ sen } 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{3} \text{ sen } \frac{\pi}{2} = 1 \text{ cm.}.$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XI-3. Los puntos 0_1 y 0_2 representan dos focos sonoros que emiten ondas de la misma frecuencia f = 100 ciclos/seg. y amplitudes respectivas A_1 = 4 cm. y A_2 = 6 cm.



Las distancias x_1 y x_2 son, respectivamente, 100 m. y 103,5 m. La velocidad de propagación del sonido en el aire es c = 350 m/s. Determinar la ley de vibración el el punto P.

****

La perturbación provocada en P por el movimiento procedente del centro perturbador 0_1, será

$$y_1 = A_1 \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = A_1 \text{ sen } 2\pi f\left(t - \frac{x_1}{c}\right) = 4 \text{ sen } 200\pi\left(t - \frac{100}{350}\right)$$

La perturbación producida en P por el foco 0_2, será

$$y_2 = A_2 \text{ sen } 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) = A_2 \text{ sen } 2\pi f\left(t - \frac{x_2}{c}\right) = 6 \text{ sen } 200\pi\left(t - \frac{103'5}{350}\right) =$$

$$= 6 \text{ sen}\left[200\pi\left(t - \frac{100}{350}\right) - 200\pi\frac{3,5}{350}\right] = 6 \text{ sen}\left[200\pi\left(t - \frac{100}{350}\right) - 2\pi\frac{350}{350}\right] =$$

$$= 6 \text{ sen } 200\pi\left(t - \frac{100}{350}\right)$$

La acción conjunta de ambos movimientos ondulatorios dará lugar a una perturbación en P dada por:

$$y = y_1 + y_2 = 4 \text{ sen } 200\pi\left(t - \frac{1}{3'5}\right) + 6 \text{ sen } 200\pi\left(t - \frac{1}{3'5}\right) = 10 \text{ sen } 200\pi\left(t - \frac{1}{3'5}\right)$$

=.=.=.=.=.=.=

XI-4. Una horquilla colocada verticalmente, está animada de un movimiento sinusoidal, de frecuencia $f = 200$ herz, de amplitud $A = 1$ mm. perpendicular a la superficie de un líquido. Las perturbaciones producidas en dos puntos 0_1 y 0_2 se propagan en la superficie del líquido a la velocidad $c = 120$ cm/seg. Calcular:

1º) El estado vibratorio de un punto P situado a 18 mm. de 0_1 y 9 mm. de 0_2.

2º) El número y posición de los puntos inmóviles en todo instante y situados en el segmento $0_1 0_2$. Longitud del segmento $0_1 0_2$ igual a $21 = 1'4$ cm.

****

1º) En los puntos 0_1 y 0_2 la separación de su posición de equilibrio de las partículas de agua de la superficie vendrá dada, por:

$$y_{0_1} = y_{0_2} = A \text{ sen } 2\pi f t = \text{sen } 400\pi\, t$$

Las ecuaciones de las perturbaciones que llegan a P procedentes de 0_1 y 0_2, son:

$$y_1 = \text{sen } 400\pi\left(t - \frac{x_1}{\lambda}\right) = \text{sen } 400\pi\left(t - \frac{1,8}{120}\right) = \text{sen}\left(400\pi t - 6\pi\right) = \text{sen } 400\pi t$$

$$y_2 = \text{sen } 400\pi\left(t - \frac{x_2}{\lambda}\right) = \text{sen } 400\ \left(t - \frac{0,9}{120}\right) = \text{sen}\left(400\pi t - 3\pi\right) = -\text{ sen } 400\pi t$$

La elongación en P del movimiento resultante, será:

$$y = y_1 + y_2 = \text{sen } 400\pi t - \text{sen } 400\pi t = 0$$

luego, el punto P permanece inmóvil en todo instante.

2º) Permanecerá inmóvil todo punto para el que la diferencia de distancias de dicho punto a los dos centros emisores de ondas sea igual a un multiplo impar de semilongitudes de onda. O sea, aquellos puntos P que cumplan la condición

$$0_1\ P - 0_2\ P = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

pero según las condiciones del problema también se verifica

$$0_1 P + 0_2 P = 21$$

De las dos ecuaciones anteriores, obtenemos

$$0_1P = 1 + (2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad \text{siendo } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{120}{200} = 0,6 \text{ cm.}$$

La distancia 0_1P está conprendida entre 0 y 21, luego

$$0 \leqslant 1 + (2k+1)\frac{\lambda}{4} \leqslant 21$$

o sea

$$-1 \leqslant (2k+1)\frac{\lambda}{4} \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{41}{\lambda} \leqslant 2k+1 \leqslant \frac{41}{\lambda}$$

Sustituyendo los valores numéricos, obtendremos:

$$-\frac{2,8}{0'6} \leqslant 2k+1 \leqslant \frac{2,8}{0'6} \qquad \text{o sea} \qquad -2'83 \leqslant k \leqslant 1'83$$

luego k solamente puede tomar los valores enteros: -2, -1, 0, 1

Las distancias a 0_1 de los 4 puntos que estando sobre el segmento 0_10_2 permanecen siempre inmoviles, son:

$$d_1 = 1 + (2k+1)\frac{\lambda}{4} = 0'7 - 3\frac{0,6}{4} = 0,7 - 0'45 = 0,25 \text{ cm.}$$

$$d_2 = 0'7 - \frac{0'6}{4} = 0'7 - 0'15 = 0'55 \text{ cm.}$$

$$d_3 = 0'7 + \frac{0'6}{4} = 0'85 \text{ cm.}$$

$$d_4 = 0'7 + 3\frac{0'6}{4} = 0'7 + 0'45 = 1'15 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=

XI-5. Uno de los extremos de una cuerda horizontal está fijo y el otro pasa por una polea sin rozamiento y se le cuelga un peso. La frecuencia del sonido fundamental emitido por la cuerda es de 392 s^{-1}. Si el cuerpo se sumerge totalmente en agua la frecuencia baja a 343 s^{-1}. Calcular la densidad del cuerpo.

****

La frecuencia fundamental de una cuerda vibrante es $f_o = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

en el primer caso $\qquad F = P = V \cdot \rho \cdot g$

y cuando el cuerpo está sumergido $\qquad F = P - E = V \cdot \rho \cdot g - V \cdot 1 \cdot g.$

sustituyendo estos valores en la formula nos quedará

$$\left.\begin{aligned} f_o &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{V\rho g}{\mu}} \\ f'_o &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{V\rho g - Vg}{\mu}} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{f_o}{f'_o} = \sqrt{\frac{V\rho g}{V\rho g - Vg}} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho - 1}}$$

elevando al cuadrado $\qquad \dfrac{f_o^2}{f'^2_o} = \dfrac{\rho}{\rho - 1}$

de donde $\qquad \rho = \dfrac{f_o^2}{f_o^2 - f'^2_o} = \dfrac{392^2}{392^2 - 343^2} = \underline{4,27 \text{ gr/cm}^3}$

XI-6. Un viajero de un tren que marcha a $V_o = 54$ Km/h. observa que viene un tren en sentido contrario y comprueba. 1º) que la frecuencia del silbato de la locomotora contraria disminuye, al pasar por él y alejarse, a 5/6 del valor que oye antes de pasar, y 2º) que el tren contrario tarda en pasar por su ventanilla t = 3 seg. Calcular la longitud de L del tren contrario y la velocidad V_s de dicho tren. Velocidad del sonido en el aire $c = 340\ m.s^{-1}$.

****

La frecuencia del sonido percibido por el observador antes de cruzarse el silbato es

$$f' = f\,\frac{c + V_o}{c - V_s}$$

y la que percibe despues de cruzarse es

$$f'' = f\,\frac{c - V_o}{c + V_s}$$

por tanto

$$\frac{5}{6}\,\frac{c + V_o}{c - V_s} = \frac{c - V_o}{c + V_s}$$

como

$$V_o = 54\ \text{Km/h} = 15\ \text{m/s}$$

tendremos

$$\frac{5}{6}\,\frac{355}{340 - V_s} = \frac{325}{340 + V_s}$$

la velocidad pedida $\qquad V_s = 16,6\ \text{m/s}$

la longitud del tren será

$$L = (V_o + V_s)t = (15 + 16,6)\,3 = \underline{94,8\ \text{m.}}$$

=.=.=.=.=.=.=

XI-7. Se deja caer libremente un diapasón desde lo alto de una torre después de haberle excitado emitiendo un sonido de f = 520 Hz. Un observador está asomado a una ventana situada a 45 m. debajo del punto en que se abandona y aproximadamente en la misma vertical. Calcular las frecuencias que percibe el observador, 1º) dos segundos antes del paso del diapasón. 2º) dos segundos despues.

$$c = 340\ \text{m/seg.} \quad g = 10\ \text{m/seg}^2$$

****

1º) Calculemos el tiempo que tarda el diapasón en descender, en caida libre, 45 m.

$$e = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2e}{g}} = \sqrt{\frac{90}{10}} = 3 \text{ seg.}$$

la velocidad del diapasón cuando han transcurrido $t' = 3-2 = 1$ seg, será

$$V = g t = 10 \text{ m/seg.}$$

aplicando la fórmula del efecto Doppler - Fizeau para el caso en que la velocidad del observador sea cero, tendremos

$$f' = f \frac{c}{c - v} = 520 \; \frac{340}{340-10} = \underline{536 \text{ herz.}}$$

2º) Al cabo de 5 segundos de haber dejado caer el diapasón su velocidad será

$$v = g t' = 50 \text{ m/s}$$

y la frecuencia percibida por el observador será

$$f'' = f \frac{c}{c + v} = 520 \; \frac{340}{340 + 50} = \underline{453 \text{ Hz}}$$

=.=.=.=.=.=.=

XI-8. Calcular la frecuencia fundamental y los dos primeros armónicos de un tubo de 15 cm. de longitud: a) Cuando está abierto por ambos extremos. b) Cuando está cerrado por un extremo. c) ¿Cuántos armónicos además del tono fundamental puede percibir una persona de oído normal en cada uno de los casos anteriores? (Velocidad del sonido en el aire =330 m/seg.).

****

a) La frecuencia del sonido emitido por un tubo abierto es $f = k \dfrac{V}{2L}$

la frecuencia fundamental es $f = \dfrac{V}{2L} = \dfrac{330}{0'30} = 1.100 \text{ H}_z$

la frecuencia del primer armónico $f_1 = 2 \dfrac{V}{2L} = 2.200 \text{ H}_z$

" " segundo " $f_2 = 3 \dfrac{V}{2L} = 3.300 \text{ H}_z$

b) La frecuencia emitida por un tubo sonoro cerrado es: $N = (2k-1)\dfrac{V}{4L}$

la frecuencia fundamental emitida es $f' = \dfrac{V}{4L} = 550 \text{ H}_z$

" del primer armónico es $f'_1 = 3\dfrac{V}{4L} = 1.650 \text{ H}_z$

" " segundo " " $f'_2 = 5\dfrac{V}{4L} = 2.750 \text{ H}_z$

c) Un oido normal puede percibir los sonidos cuyas frecuencias estén comprendidas en el intervalo de 20 a 20.000 ciclos/seg.

En el caso del tubo abierto un oido normal puede percibir 17 armónicos además del sonido fundamental ya que la frecuencia del armonico número diecisiete es

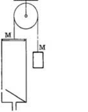
$$f_{17} = 18\,\frac{V}{2L} = 18.1100 = 19.800 < 20000 \quad H_z.$$

En el caso del tubo cerrado también una persona de oido normal percibe diecisiete armónicos además del sonido fundamental, ya que

$$f'_{17} = (2k-1)\frac{V}{4L} = (2\cdot 18-1)\cdot 550 = 35\cdot 550 = 19250 < 20000 \quad H_z$$

=.=.=.=.=.=.=

XI-9. Un tubo sonoro de longitud L = 2m. se cierra por un extremo como indica la fig. con un disco de masa M colgado de un hilo que pasa por una polea de masa despreciable. Al otro extremo del hilo se encuentra otra masa igual M. En estas condiciones el tubo es excitado y emite un sonido de frecuencia f. Si se coloca sobre el disco una masa m = $\frac{M}{2000}$. Calcular cuanto tiempo debe transcurrir para oir una frecuencia 3f. Velocidad del sonido en el aire del tubo = = 340 m s^{-1}. g = 10 m/s^2



****

La frecuencia emitida por el tubo cerrado de longitud L será

$$f = (2k-1)\cdot\frac{V}{4L}$$

y el sonido fundamental es $\quad f = \frac{V}{4L}$

cuando baje el disco una longitud, h , la frecuencia del sonido emitido por el tubo es $\quad 3f = \frac{V}{4L'}$

de donde obtendremos $\quad L' = \frac{L}{3} = \frac{2}{3}$ m.

y por tanto $\quad h = L - L' = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ m.

La aceleración del disco es

$$a = \frac{\Sigma F}{\Sigma M} = g\,\frac{M/2000}{2M} = \frac{10}{4000} = \frac{1}{400} \quad m/s^2$$

y el tiempo transcurrido valdrá

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{800}{3}} = \underline{16,3 \quad seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=

XI-10. Un observador nota que la frecuencia emitida por el silbato de la locomotora de un tren cambia de 2900 c/s a 2600 c/s cuando pasa por su posición. A partir de estos datos, calcúlese la velocidad del tren. Velocidad del sonido en el aire 340 m/s.

****

Aplicando la fórmula del efector Doppler al caso de observador en reposo y emisor acercandose a él, tendremos

$$f_1 = f\,\frac{340}{340-V} = 2900 \text{ hz.}$$

cuando el emisor (locomotora) se aleja

$$f_2 = f\,\frac{340}{340+V} = 2600 \text{ hz.}$$

dividiendo miembro a miembro las igualdades anteriores, quedará

$$\frac{340 + V}{340 - V} = \frac{29}{26}$$

la velocidad del tren, será

$$V = 18'5 \text{ m/s} = 66'6 \text{ Km/h.}$$

=.=.=.=.=.=.=

XI-11. Una embarcación se dirige perpendicularmente hacia una costa que suponemos plana y vertical. A una cierta distancia se emite con la sirena del barco un sonido que, después de reflejado en la costa, se percibe en el barco cinco segundos más tarde y un semitono más agudo que el emitido. Calcular la velocidad del barco y la distancia a que se encontraba de la costa cuando hizo sonar la sirena. (Velocidad del sonido, 340 m/s. Semitono $\frac{16}{15}$)

****

El observador que va en el barco percibe el sonido reflejado moviendose hacia él con la misma velocidad con la que se mueve el barco. Apliquamos la fórmula del efecto Doppler-Fizeau, obtendremos

$$f' = f\,\frac{c+v}{c-v} \qquad v = c\,\frac{f'-f}{f'+f} = c\,\frac{f'/f-1}{f'/f+1} = 340\,\frac{\frac{16}{15}-1}{\frac{16}{15}+1} = \frac{340}{31}$$

o sea

$$v = 10,96 \text{ m/s}$$

La distancia recorrida por el sonido será el doble de la distancia inicial del barco a la costa, menos el espacio avanzado por el barco en el mismo tiempo, o sea:

$$2x - vt = ct$$

de donde

$$x = \frac{(v+c)t}{2} = \frac{(10'96+340)5}{2} = 877'4 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=.=

XI-12. Demostrar que la intensidad de una onda esférica emitida por un foco puntual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. ¿Qué relación existe entre amplitudes en dos puntos situados a 10 cm. y a 50 cm. del foco emisor?

****

Se llama intensidad del movimiento ondulatorio la energía que pasa a través de la unidad de superficie normal a la dirección de propagación en la unidad de tiempo. En este caso, la energía se distribuye uniformemente por ser las ondas esféricas y la energía que pasa en la unidad de tiempo a traves de dos superficies de onda de radios r_1 y r_2 ha de ser la misma, o sea

$$4\pi r_1^2 \cdot I_1 = 4\pi r_2^2 \cdot I_2 \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \text{c. q. d.}$$

La intensidad es proporcional a la energía de oscilación y, a su vez, la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, por tanto

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

teniendo en cuenta la relación hallada anteriormente, concluimos que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{10}{50} = 0,2$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XI-13. a) La potencia de entrada de un amplificador es $p_0 = 0,5$ watios ¿Cuál debe ser la potencia de salida para obtener una ganancia de 10 decibeles?

b) Un amplificador eleva la tensión de entrada desde $V_0 = 5$ voltios hasta $V_1 = 100$ voltios. ¿Cuál es en decibeles la ganancia de dicho amplificador?

*****

a) Según la ley psico-física de Weber-Fechner, las variaciones de las sensaciones sonoras, vienen dadas por la expresión

$$S_1 - S_o = 10 \log \frac{P_1}{P_o}$$

Sustituyendo valores

$$10 = 10 \log \frac{P_1}{0,5} \Rightarrow 1 = \log \frac{P_1}{0'5}$$

de donde

$$\frac{P_1}{0,5} = 10 \Rightarrow P_1 = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ watios}$$

b) Como la potencia es directamente proporcional al cuadrado de la tensión, la ley de Weber-Fechner puede expresarse de la siguiente forma

$$S_1 - S_o = 10 \cdot \log \frac{V_1^2}{V_o^2}$$

Sustituyendo valores

$$S_1 - S_o = 10 \cdot \log \frac{100^2}{5^2} = 10 \cdot \log (20)^2 = 20 \cdot \log 20 = 26 \text{ decibeles}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XI-14. Una ventana de 1 m^2 de superficie, está abierta a una calle de mucho tráfico cuyo ruido produce un nivel de intensidad, en la ventana, de 80 decibeles. ¿Cuál es la potencia acustica transportada por las ondas sonoras que atraviesan la ventana?

****

Tomando la intensidad de referencia $I_o = 10^{-16}$ watios/cm^2, la sensación sonora en la ventana, será

$$S = 10 \cdot \log \frac{I}{I_o}$$

o sea

$$80 = 10 \log \frac{I}{I_o} \Rightarrow 8 = \log I - \log I_o = \log I + 16$$

de donde

$$\log I = -8 \Rightarrow I = 10^{-8} \text{ watios/cm}^2 = 10^{-4} \text{ w/m}^2$$

luego, la potencia acustica a través de la ventana, será:

$$P = \frac{I}{S} = \frac{10^{-4}}{1} = 10^{-4} \text{ watios}$$

=.=.=.=.=.=.=

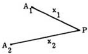
XI-15. Dos altavoces A_1 y A_2, emiten ondas sonoras uniformente en todas las direcciones dentro de un medio isótropo. El A_1 tiene una potencia acustica de $8\cdot10^{-4}$ w. y el B de $13'5\cdot10^{-4}$ w. Tomando como nivel de refe rencia de intensidad $I_0 = 10^{-16}$ w/cm^2, como velocidad del sonido c = = 340 m/s y sabiendo que ambos altavoces vibran en fase con una frecuen cia de f = 170 ciclos/seg, calcular: a) La diferencia de fase de las dos señales que llegan a un punto P, situado a x_1 = 3 m. de A_1 y a x_2 = = 4m. de A_2. b) La intensidad en que produce A_1 en P si no emite A_2, y la intensidad en P producida por A_2 si no radia A_1. c) La intensidad y la sensación sonora en P cuando emiten simultáneamente ambos altavoces.

****

a) El desfasaje entre las dos señales que llegan al punto P, será

$$\varphi = 2\pi f\,\frac{x_2 - x_1}{v} = \frac{2\pi\cdot170}{340}\,(4-3) =$$

$$= \pi = 180^{\circ}$$



b) La intensidad producida por el altavoz A_1 en P cuando no emite A_2, será

$$I_1 = \frac{P_1}{4\pi x_1^2} = \frac{8\cdot10^{-4}}{4\pi\cdot9} = 7'07\cdot10^{-6} \text{ watios/m}^2$$

La intensidad producida en P por el altavoz A_2 si no radia A_1, será

$$I_2 = \frac{P_2}{4\pi x_2^2} = \frac{13'5\cdot10^{-4}}{4\pi\cdot16} = 6'71\cdot10^{-6} \text{ watios/m}^2$$

c) La intensidad en P cuando emiten A_1 y A_2 simultáneamente, será

$$I = I_1 + I_2 = (7'07 + 6'71)10^{-6} = 13'78\cdot10^{-6} \text{watios/m}^2 = 13'78\cdot10^{-10} \text{w/cm}^2$$

El nivel de la sensación sonora será:

$$S = 10\log\frac{13'78\cdot10^{-10}}{10^{-16}} = 10\log 13'78\cdot10^{6} = 10(6 + \log 13'78) = 73'92 \text{ decibeles}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

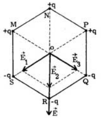
CAPITULO XII

CARGA, CAMPO Y POTENCIA ELECTRICOS

XII-1. Calcular el campo creado en el centro del exágono regular de la figura. Lado del exágono l = 10 cm., $q = 10\ \mu$ C.

****

El campo creado en 0 por las cargas situadas en los vertices P y S, es



$$E_1 = 2\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{q}{l^2} = 18\cdot10^9\ \frac{10^{-5}}{10^{-2}} = 18\cdot10^6 \text{N/C}$$

El campo creado por las cargas situadas en M y Q es

$$E_3 = 2\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{q}{l^2} = 18\cdot10^6\ \ \text{N/C}$$

y análogamente

$$E_2 = 18\cdot10^6\ \ \text{N/C}$$

y el campo resultante en 0 será:

$$E = 2E_1\cdot\cos\ 60 + E_2 = 2\cdot18\cdot10^6 = \underline{36\cdot10^6\ \ \text{N/C.}}$$

=.=.=.=.=.=.=

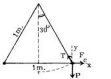
XII-2. Dos esferas muy pequeñas de 10 gr. de masa y cargadas positivamente con la misma carga, se encuentran en los extremos de dos hilos de seda de longitud 1 m. supendidos del mismo punto. Si el ángulo que forma cada hilo con la vertical es de 30° en la posición de equilibrio.

a) Calcular el valor de la tensión de los hilos en la posición de equilibrio

b) Carga de cada esfera
c) Si desaparece una de las cargas, calcular la velocidad de la otra al pasar por la vertical.
Si se desea que al desaparecer una carga la otra permanezca en la misma posición de equilibrio del apartado a).
d) Calcular el campo electrico (módulo, dirección y sentido) que será necesario aplicar.

****

a) Sobre cada una de las esferas actúan fuerzas: el peso, la fuerza de repulsión electrica y la tensión del hilo.



Para que cualquiera de las dos esferas esté en equilibrio se ha de verificar

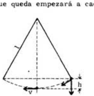
$$\left.\begin{aligned} T\cos 30^o - P = 0 \\ T\,\text{sen}\ 30^o - F_c = 0 \end{aligned}\right\}$$

luego $T = \dfrac{P}{\cos 30} = \dfrac{10 \times 980}{\sqrt{3/2}} = 11329$ dinas

b) Del sistema anterior obtenemos

$$\left.\begin{aligned} F_c &= T\,\text{sen}\ 30^o = \frac{T}{2} \\ \text{como} \qquad F_c &= k\frac{q^2}{d^2} = \frac{q^2}{10^4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow q = \sqrt{10^4 F_c} = 10^2\sqrt{\frac{T}{2}} = 7520,\text{u. e. e.}$$

c) Al desaparecer una de las cargas, F_c desaparece también y la bola que queda empezará a caer, entonces



$$m\,g\,h = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos 30^o)}$$

$$v = \sqrt{2\cdot 9,8(1-\frac{3}{2})} = 1,62\ \text{m/s}$$

d) Será un campo que lleve la misma dirección y sentido que llevaba F_c y cuyo módulo valdrá

$$E = \frac{F_c}{q} = \frac{K\dfrac{q^2}{10^4}}{q} = \frac{q}{10^4} = 0,752\ \text{u.e.e.} = 22.560\ \frac{\text{voltios}}{\text{metro}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

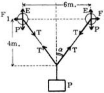
XII-3. Dos globos iguales de masas despreciables se llenan de helio en condiciones normales de presión y temperatura y en su centro se colocan sendas cargas positivas iguales q. Mediante dos hilos se les ata a un peso de 8 gr. quedando el conjunto en equilibrio en la posición que se indica en la figura. Determinar: 1º) La tensión en los hilos 2º) La carga q.

****

1º) Para que el peso esté en equilibrio se ha de verficar que

$$2T \cos\alpha = P$$

luego $T = \dfrac{P}{2\cos\alpha} = \dfrac{8 \times 980}{2 \times 4/5} = 4900$ dinas



2º) Aislando uno de los globos obtendremos

$$F_1 = T \operatorname{sen}\alpha = 4900\,\frac{3}{5} = 2940 \text{ dinas}$$

Aplicando la formula de Coulomb, tendremos

$$F_1 = K\frac{q^2}{r^2} \Rightarrow q = r\sqrt{F_1} = 60\sqrt{2940} = 3152 \text{ u.e.e.}$$

=.=.=.=.=.=

XII-4. Se tienen tres bolitas esféricas conductoras idénticas A, B y C de radio muy pequeño. Las A y B están fijas a l = 50 cm. de distancia y tienen cargas eléctricas negativas, siendo la de A ocho veces mayor que la de B. La C está primitivamente en estado neutro y puede moverse libremente en la recta AB horizontal.

a) Se coge la bolita C con unas pinzas aislantes y se pone en contacto con A dejándola después libre. Determinar en qué posición quedará en equilibrio.

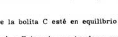
b) Se vuelve a coger C con las pinzas y se pone en contacto con B dejándola después libre. Determinar su nueva posición de equilibrio.

****

a) Llamemos q_A y q_B a las cargas iniciales de las bolitas A y B. Después del contacto de C con A, las cargas de las tres bolitas serán respectivamente:

$q'_A = \dfrac{q_A}{2}$, $q_c = \dfrac{q_A}{2}$ y $q_B = \dfrac{q_A}{8}$. Para que la bolita C esté en equilibrio las fuerzas de repulsión ejercidas por las bolitas A y B han de ser iguales y opuestas, luego

$$K\,\frac{q'_A \cdot q_c}{x^2} = K\,\frac{q_B \cdot q_c}{(l-x)^2}$$



de donde

$$\frac{q_{A/2}}{x^2} = \frac{q_{A/8}}{(l-x)^2} \Rightarrow x^2 = 4x^2 + 4l^2 - 8lx \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

la única solución válida es $x = 1/3$ m.

b) Después de tocar la bolita B con la C, la carga de las mismas será:

$$q'_B = q'_c = \frac{q_B + q_c}{2} = \frac{q_{A/8} + q_{A/2}}{2} = \frac{5q_A}{16}$$

procediendo en forma análoga al caso anterior, tendremos:

$$K\frac{q'_A \cdot q'_c}{x^2} = K\frac{q'_B \cdot q'_c}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{q_{A/2}}{x^2} = \frac{5q_{A/16}}{(1-x)^2}$$

de donde: $5x^2 = 81^2 + 8x^2 - 161x \Rightarrow 3x^2 - 8x + 2 = 0$

la solución válida es:

$$x = \frac{8 - \sqrt{40}}{6} = 0,28 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=

XII-5. Cincuenta gotas idénticas de mercurio se cargan simultáneamente al mismo potencial de 100 voltios. ¿Cuál será el potencial V' de la gran gota formada por aglomeración de aquéllos? (Se supone que las gotas son de forma esférica).

****

El potencial de una esfera es: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$

la carga de una de las gotas será: $q = 4\pi\varepsilon_o\, r\, V$

La gran gota formada tendrá una carga: $Q = 50\, q$.

y su potencial será

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{50q}{R} = \frac{50}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4\pi\varepsilon_o rV}{R} = 50\,\frac{r}{R}\,V$$

el volumen de la gota grande es igual a 50 veces el volumen de una de las gotas

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 50\,\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{50} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{50^{1/3}}$$

sustituyendo en la expresión de V', tendremos

$$V' = \frac{50}{50^{1/3}}\, V = 50^{2/3}\, V = 10^2 \cdot 50^{2/3} = 1360 \text{ voltios}$$

=.=.=.=.=.=

XII-6. Una carga puntual, positiva, de 10^{-9} culombios está situada en el origen de un sistema de coordenadas ortogonales. Otra carga puntual, negativa de 2.10^{-8} culombios está situada sobre el eje de ordenadas a 1 m. del origen. Determinar:

1º Las intensidades de los campos eléctricos, creados por cada una de las cargas mencionadas en el punto A, situado a 2 metros del origen sobre el eje de las equis.

2º Las componentes coordenadas del campo total existente en A.

3º El trabajo que es necesario realizar para trasladar tres culombios entre A y B, cuyas coordenadas son (4, 2) metros.

****

1º) La intensidad del campo eléctrico creado por la carga de 10^{-9} culombios en el punto A es:

$$E_1 = K\,\frac{q_1}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{10^{-9}}{4} = \frac{9}{4} = 2,25\ \text{Nw/Cul.}$$

La intensidad del campo creado por la otra carga en A, será:

$$E_2 = K\,\frac{q_2}{r_2} = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-8}}{5} = \frac{180}{5} = 36\ \text{Nw/Cul.}$$

2) Las componentes del campo resultante en A serán:

$$E_x = E_1 - E_2\,\frac{2}{\sqrt{5}} = 2,25 - 36\,\frac{2}{\sqrt{5}} = 29,95\ \text{N/Cul.}$$

$$E_y = E_2\,\frac{1}{\sqrt{5}} = 36\,\frac{1}{\sqrt{5}} = 15,98\ \text{N/Cul.}$$

3) El potencial en A será:

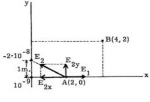
$$V_A = 9\cdot 10^9\left(\frac{10^{-9}}{2} - \frac{2\cdot 10^{-8}}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= -\ 76,5\ \text{voltios}$$

el potencial en B

$$V_B = 9\cdot 10^9\left(\frac{10^{-9}}{\sqrt{20}} - \frac{2\cdot 10^{-8}}{\sqrt{17}}\right) =$$

$$= -\ 41,58$$



El trabajo para llevar 3 culombios de A a B será:

$$W_A^B = q\,(V_B - V_A) = 3(-41,58 + 76,5) = 104,76\ \text{julios}$$

=.=.=.=.=.=.=

XII-7. Un péndulo elétrico está constituido por una esferita metálica de masa 1 gr, colgada de un hilo muy fino de longitud l = 150 cm. Se le hace oscilar en una región donde existe un campo electrico uniforme vertical y se carga la esferita con q = 39 u.e.e. Cuando el campo es vertical de abajo a arriba la esferita efectua 100 oscilaciones en 314 seg. y si el campo está dirigido de arriba a abajo tarda 207 seg. en dar 100 oscilaciones. Se pide: 1º) La intensidad del campo eléctrico. 2º) El valor de g en el lugar de la experiencia

****

Cuando el campo eléctrico es vertical de abajo a arriba la fuerza que ejerce el campo sobre la esferita es F = qE, la aceleración, debida a esta fuerza, valdrá $a = \frac{qE}{m}$

La aceleración resultante sobre la esferita será $a = q - \frac{qE}{m}$ y el período del péndulo

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{qE}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg - qE}} \qquad (a)$$

Análogamente, el período cuando el campo eléctrico actua de arriba a bajo, será

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g + \frac{qE}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg - qE}} \qquad (b)$$

De las ecuaciones (a) y (b) obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} mg - qE = \dfrac{4\pi^2 ml}{T_1^2} \\ \\ mg + qE = \dfrac{4\pi^2 ml}{T_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E = \dfrac{2\pi^2 lm}{q}\,\dfrac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 \cdot T_2^2} \\ \\ g = 2\pi^2 l\,\dfrac{T_1^2 + T_2^2}{T_1^2 \cdot T_2^2} \end{array}\right.$$

Sustituyendo valores

$$E = \frac{2 \cdot 3,14^2 \cdot 150}{39} \cdot \frac{3,14^2 - 2,07^2}{3,14^2 \times 2,07^2} = 10 \text{ u.e.e} = 3 \cdot 10^5 \text{ voltios/m.}$$

$$g = 2 \cdot 3,14^2 \cdot 150 \; \frac{3,14^2 + 2,07^2}{3,14^2 \cdot 2,07^2} = 990 \text{ cm/s}^2 = 9,9 \text{ m/s}^2$$

=.=.=.=.=.=.=.=

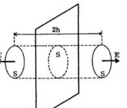
A..-8. 1º) Aplicar el teorema de Gauss al cálculo del campo eléctrico creado por una superficie plana cargada uniformemente.

2º) Supuesta la superficie plana vertical, colguemos de la misma, mediante un hilo de seda de peso despreciable, una bolita que contiene una carga $q = \sqrt{3} \cdot 10^{-9}$C. y cuya masa es m = 1 gr. Se observa que el ángulo que forma el hilo con la vertical es de 30°. ¿Cuál es la densidad superficial de carga de la lámina? $g = 10$ m/s^2.

****

1º) Tomemos como superficie de Gauss un cilindro de altura 2h, con eje perpendicular a la superficie cargada y que sea simétrico respecto a dicha superficie.

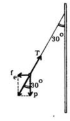
Por simetría, las líneas de fuerza del campo eléctrico son perpendiculares a la superficie cargada y, por tanto, no habrá flujo a través de la superficie lateral del cilindo, luego



$$\left.\begin{array}{l} \int E\,dS = E\cdot S + ES = 2E\cdot S \\ \\ y \quad q = \sigma\, S \end{array}\right\} \Rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o}$$

de donde $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

2º) Existen tres fuerzas sobre la bolita: El peso, la tensión del hilo y la fuerza debida al campo elèctrico. En la posición de equilibrio, se verifica



$$\text{tg } 30 = \frac{f_e}{p} = \frac{qE}{p} = \frac{q\,\sigma}{2\varepsilon_o p} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma = \frac{2\sqrt{3}\,\varepsilon_o p}{3q} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}\cdot 10}{3\cdot \sqrt{3}\cdot 10^{-9}}$$

$$\sigma = 4,9\cdot 10^{-5} \ \text{C/m}^2$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XII-9. Un átomo de hidrógeno está constituido por un núcleo central puntual de carga $e = 4,77\cdot 10^{-10}$ u.e.e. y un electrón periferico, de carga -e y masa $m = 9\cdot 10^{-31}$ Kg. Se admitirá que, debido a la atracción de estas partículas, el electrón describirá círculos cuyo centro será el núcleo. Siendo el radio del círculo 0,53 Å, calcular: 1º) la velocidad del electrón 2º) La energía potencial, cinética y total del sistema, dando el resultado en ergios y en eV.

1º) La fuerza centripeta que mantiene al electrón en su órbita circular es la fuerza de atracción entre el electrón y el núcleo, por tanto

$$\frac{mv^2}{R} = K\,\frac{e^2}{R^2} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{K}{mR}}$$

en el sistema u.e.e. $K = 1$, luego

$$v = 4,77 \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 0,53 \cdot 10^{-8}}} = 2,14 \cdot 10^{8} \text{ cm/s}$$

2º) El potencial a una distancia R del núcleo es

$$V = -K \frac{e}{R}$$

y la energía potencial

$$E_p = e \cdot V = -K \frac{e^2}{R} = -\frac{e^2}{R} = -\frac{4,77^2 \cdot 10^{-20}}{0,53 \cdot 10^{-8}} = -42,92 \cdot 10^{-12} \text{ ergios} =$$

$- 26,8$ eV

La energía cinética valdrá

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\, 9 \cdot 10^{-31} \cdot 4,77 \cdot 10^{16} = 21,46 \cdot 10^{-12} \text{ ergios} = 13,4 \text{ eV}$$

La energía total es

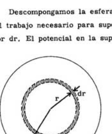
$$E = E_p + E_c = -42,92 \cdot 10^{-12} + 21,46 \cdot 10^{-12} = -21,46 \cdot 10^{-12} \text{ ergios} = -13,4 \text{ eV}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

•XII-10. Supongamos que una carga positiva está distribuída uniformemente en un volumen esférico de radio R. Calcular la energía necesaria para que la carga por unidad de volumen en la esfera sea ρ.

****

Descompongamos la esfera en capas esféricas de espesor dr y calculemos el trabajo necesario para superponer, a una esfera de radio r, una capa de espesor dr. El potencial en la superficie de la esfera de radio r, es



$$V = \frac{1}{4\pi \varepsilon_o} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_o} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_o} r^2$$

la carga de la capa superpuesta a esta esfera, será

$$dq = \rho \, dv = \rho \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

El trabajo para agregar esta capa es

$$dW = V.dq = \frac{4\pi \rho^2}{3\,\varepsilon_o} r^4 \, dr$$

Integrando esta última expresión, obtenemos

$$W = \frac{4\pi\rho^2}{3\,\varepsilon_o} \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{15} \frac{\pi \rho^2 R^5}{\varepsilon_o}$$

XII-11. Estudiar el campo creado por un conductor rectilíneo indefinido, siendo λ su densidad lineal de carga.

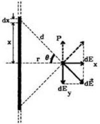
****

1^{er} procedimiento

Tomemos, sobre el conductor, elementos de longitud dx, cuya carga será $dq = \lambda\, dx$

El campo creado por cada carga dq, será:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dx}{d^2}$$



Las componente dE_y se anulan por simetría, por tanto, el campo resultante, será:

$$E = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\cos\theta}{d^2}dx$$

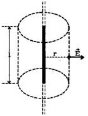
como $\quad d = \frac{r}{\cos\theta} \quad$ y $\quad x = r\,tg\,\theta \Rightarrow dx = \frac{r}{\cos^2\theta}d\theta$

nos quedará

$$E = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

2º procedimiento

Tomemos como superficie de Gauss una superficie cilíndrica cuyo eje sea el conductor, su radio r, y su altura tenga una longitud cualquiera, l.



Apliquemos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

El flujo a través de las bases es nulo porque el campo eléctrico es paralelo a esas superficies. El flujo a través de la superficie lateral del cilindro será

$$\Phi = \int E\, dS\cos\alpha = E\int dS = 2\pi r l E$$

por tanto

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

XII-12. Un conductor rectilíneo indefinido cargado uniformemente crea un potencial de 20 voltios en los puntos situados a una distancia de 2 m. de la recta y de 10 voltios en los situados a 4 m. de la misma. Calcular la densidad lineal de carga λ del conductor rectilíneo.

****

Sabemos que el campo creado por este conductor (ver prob. anterior) viene dado por la expresión

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_o r}$$

Como el campo deriva del potencial: $E = -\frac{dv}{dr} \Rightarrow -dv = E\,dr$

integrando

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Sustituyendo valores, nos queda

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_o(V_1 - V_2)}{\ln {}^{r_2}/r_1} = \frac{\frac{1}{18}\,10^{-9}\cdot 10}{\ln 2} = 8,05\cdot 10^{-10}\ \text{C/m}$$

=.=.=.=.=.=

XII-13. Una partícula con una energía de 5 MeV se dirige desde lejos hacia un nucleo de Au (número atomico 79). ¿A qué distancia del centro del núcleo invierte el sentido de su movimiento la partícula ? $e = 1,6.10^{-19}$ Cul.

****

Toda la energía cinética de las partículas se habrá transformado en trabajo para llevar la partícula desde un punto de potencial O a otro de potencial $K\frac{Q.q}{R}$, siendo Q la carga del núcleo de Au y q la carga de la partícula α, luego

$$E_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{2e\cdot 79e}{R}$$

de donde

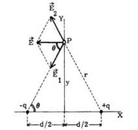
$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{158e^2}{E_c} = 9\cdot 10^9\ \frac{158\times 1,6^2\times 10^{-38}}{5\times 1,6\times 10^{-13}} = 4,55\times 10^{-14}\,\text{m.}$$

=.=.=.=.=.=.=

XII-14. Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas $\pm$ q situadas en los puntos $\vec{r}_{\pm} = (\pm\frac{d}{2},0,0)$. Deduzcan la expresión del vector campo eléctrico en:

a) Un punto de coordenadas (0,y,0)
b) Un punto de coordenadas (x,0,0)
c) ¿Qué ocurre cuando en a) $y \to \infty$? ¿Y cuándo en b) $x \to \infty$?

a) Las cargas + q y -q crean en P los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ de la figura



donde $$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}$$

el módulo del campo eléctrico resultante es

$$E = 2E_1\cos\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\frac{d/2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qd}{r^3}$$

como $$r = \left(\frac{d^2}{4} + y^2\right)^{1/2}$$

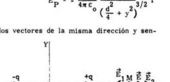
el vector campo elétrico en P será

$$E_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qd}{\left(\frac{d^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\vec{i}$$

b) En este caso $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son dos vectores de la misma dirección y sentido contrario

$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\vec{i}$$



El vector campo eléctrico resultante en M será

$$\vec{E}_M = \vec{E}_2 + \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}\right]\vec{i}$$

o sea

$$\vec{E}_M = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{xqd}{\left(x^2-\frac{d^2}{4}\right)^2}$$

c) En ambos casos $\begin{cases}\vec{E}_P = 0\\ \vec{E}_Q = 0\end{cases}$

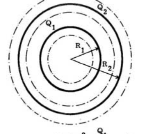
XII-15. Dos conductores esféricos concéntricos de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), tienen cargas Q_1 y Q_2 respectivamente. Calcular, con ayuda del teorema de Gauss, el campo electrico:

a) En el interior de la esfera de radio R_1 ($0 < r < R_1$)
b) En la superficie de la esfera de radio R_1 ($r = R_1$)
c) En la región limitada por las dos superficies ($R_1 < r < R_2$)
d) En la superficie de la esfera de radio R_2 ($r = R_2$)
e) En el exterior ($r > R_2$)

****

a) Apliquemos el teorema de Gauss a una superficie esférica concéntrica con los dados y de radio $0 \leq r < R_1$, obtendremos

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$



b) Se considera como superficie de Gauss la esfera de radio R_1, obtendremos

$$E_2 \cdot 4\pi R_1^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1^2}$$

c) Tomemos una esfera de radio

$$R_1 < r < R_2$$

$$E_3 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

d) Consideremos como esfera de Gauss la esfera de radio R_2

$$E_4 \cdot 4\pi R_2^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{R_2^2}$$

e) Análogamente para $r > R_2$

$$E_5 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XII-16. Suponiendo que una carga positiva está distribuida uniformemente en un volumen esférico de radio $R = 10$ cm., siendo la densidad de carga por unidad de volumen $\rho = \frac{3}{4\pi} \cdot 10^{-5} C/m^3$. Calcular el campo y potencial creados en los siguientes puntos: 1°) En un punto situado a r_1 = 5 cm. 2°) En un punto situado a r_2 = 20 cm. del centro de la esfera. 3°) En un punto de la superficie de la esfera

****

1) Apliquemos el teorema de Gauss a una superficie cuyo centro sea el de la esfera dada y su radio sea r_1

Al estar la carga distribuida uniformemente en todo el volumen de la esfera el campo será radial por razones de simetría, por tanto

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_1 \int dS = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{4/3\pi r_1^3 \rho}{\varepsilon_o}$$

de donde
$$E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_o} = \frac{\frac{3}{4\pi}10^{-5}.5.10^{-2}}{\frac{3}{4\pi.9.10^9}} = 4500 \quad N/c$$

2) Consideremos la superficie esférica de radio r_2 y apliquemos el teorema de Gauss a dicha superficie, tendremos

$$4\pi r_2^2 E_2 = \frac{4/3\pi R^3 \rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r_2^2}$$

y sustituyendo valores

$$E_2 = \frac{\frac{3}{4\pi}10^{-5}.10^{-3}}{\frac{3}{4\pi.9.10^9}4.10^{-2}} = 2250 \quad N/C$$

3) Basta aplicar cualquiera de las expresiones halladas anteriormente y sustituir r_1 y r_2 por R.

$$E_3 = \frac{\rho R}{3\varepsilon_o} = \frac{\frac{3}{4\pi}10^{-5}.10^{-1}}{\frac{3}{4\pi.9.10^9}} = 9000 \quad N/C.$$

El potencial en un punto tal que $r_2 > R$ es igual al trabajo realizado contra la fuerza ejercida por el campo para traer la unidad de carga positiva desde el infinito al punto.

Luego

$$V_2 = -\int_\infty^{r_2} E\,dr = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o}\int_\infty^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^{r_2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r_2}$$

o sea

$$V_2 = \frac{\frac{3}{4\pi}\,10^{-5}\cdot 10^{-3}}{\frac{3}{4\pi 9.\,10^9}\cdot 2\cdot 10^{-1}} = 450 \text{ voltios}$$

el potencial en un punto de la superficie de la esfera, será

$$V = \frac{\rho R^2}{3\,\varepsilon_o} \qquad \text{ya que} \qquad r_2 = R$$

luego

$$V = \frac{\frac{3}{4\pi}\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-2}}{\frac{3}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot 10^{-1}} = 9000 \text{ voltios}$$

la diferencia de potencial entre puntos situados a distancias r_1 y R del centro de la esfera, será

$$V - V_1 = -\int_{r_1}^{R} E_1\,dr = -\frac{\rho}{3\,\varepsilon_o}\int_{r_1}^{R} r\,dr = -\frac{\rho}{6\,\varepsilon_o}\left[R^2 - r_1^2\right]$$

de donde

$$V_1 = V + \frac{\rho}{6\,\varepsilon_o}\left[R^2 - r_1^2\right] = 9000 + \frac{\frac{3}{4\pi}\cdot 10^{-5}}{\frac{6}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}}\left[10^{-2} - 25\cdot 10^{-4}\right] = 9337{,}5 \text{ voltios}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XII-17. En un aparato de Millikan se observa que cuando cae una gota de glicerina, en ausencia de campo eléctrico, recorre $16\cdot 10^{-3}$ m. en 20 seg La misma gota recorre $10{,}53\cdot 10^{-3}$ m. en el mismo tiempo cuando se establece una diferencia de potencia de 40000 voltios entre las placas del condensador. Calcular el radio y la carga de la gota.
Datos: Distancia entre placas del condensador $d = 3\cdot 10^{-2}$ m.; $g = 9{,}81$ $m\cdot s^{-2}$; densidad de la glicerina $\rho = 1{,}25\cdot 10^3$ $Kg\cdot m^{-3}$; coeficiente de viscosidad del aire $\eta = 1{,}80\cdot 10^{-5}$ $Nw\cdot S\cdot m^{-2}$ densidad del aire $\rho' = 1{,}30$ $Kg\cdot m^{-3}$.

****

Cuando alcance la velocidad límite se verificará: $P - E_m - R = 0$

o sea

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\, g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho'\, g - 6\pi\rho r v_1 = 0$$

siendo $R = 6\pi\eta r v$ la fórmula de Stokes y $v_1 = \frac{16\cdot 10^{-3}}{20} = 8\cdot 10^{-4}\,m\,s^{-1}$ y E_m el empuje

de donde

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho - \rho')}} = \sqrt{\frac{9 \times 1,80 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{2 \times 9,81 \cdot (1250 - 1,3)}} = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Cuando la gota cae despues de establecer la diferencia de potencial, se verificará: $P - E_m - R - qE = 0$

o sea $$\frac{4}{3} r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - 6\pi\eta r v_2 - qE = 0$$

siendo $$E = \frac{V}{d} = \frac{4 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^{-2}} = \frac{4}{3} \cdot 10^6 \text{ vol/m.}$$

y $$v_2 = \frac{10,53 \cdot 10^{-3}}{20} = 5,265 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

de donde

$$q = \frac{P - E_m - R}{E} = \frac{6\pi\eta r v_1 - 6\pi\eta r v_2}{E} = \frac{6\pi\eta r(v_1 - v_2)}{E}$$

sustituyendo valores

$$q = \frac{6\pi \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \cdot 2,3 \cdot 10^{-6}(8 \cdot 10^{-4} - 5,265 \cdot 10^{-4})}{\frac{4}{3} \cdot 10^6} \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ culombios}$$

o sea, aproximadamente, la carga de un electrón

=.=.=.=.=.=.=

XII-18. Calcular el campo y el potencial eléctricos creados por el conductor de la figura en el punto O. La densidad lineal de carga es $\lambda = K\theta$ culombios / m. siendo $K = 5 \cdot 10^{-6}$ unidades Giorgi. Radio R = 1 m.

****

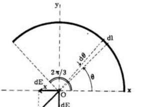
Descompongamos el conductor en elementos de longitud dl, cuya carga será $dq = \lambda\, dl = K\theta R\, d\theta$. El campo eléctrico creado por una de estas cargas elementales es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{dq}{R^2} \vec{u}_R$$

descomponiendo este vector según los ejes OX y OY, obtenemos

$$dEx = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dq}{R^2} \cos\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{K\theta}{R} \cos\theta \, d\theta$$

$$dEy = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dq}{R^2} \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{K\theta}{R} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$



Integrando ambas expresiones a lo largo del conductor, nos quedará

$$Ex = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{K}{R}\int_0^{2\pi/3}\theta\cos\theta\ d\theta = -\frac{K}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\left[\theta\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi/3} - \int_0^{2\pi/3}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right] =$$

$$= -\frac{K}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right]_0^{2\pi/3} = -5\cdot10^{-6}\cdot9\cdot10^{9}\left[\frac{2\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right] = -16750\ \text{N/C}$$

$$Ey = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{K}{R}\int_0^{2\pi/3}\theta\operatorname{sen}\theta d\theta = -\frac{K}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\left[-\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi/3} + \int_0^{2\pi/3}\cos\theta d\theta\right] =$$

$$= -\frac{K}{4\pi\varepsilon_o R}\left[-\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi/3} = -5\cdot10^{-6}\cdot9\cdot10^{9}\left[\frac{2\pi}{3}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -86085\ \text{N/C}$$

El campo resultante en O vendrá dado por el vector

$$\vec{E} = -16750\,\vec{i} - 86085\,\vec{j}$$

cuyo módulo será

$$E = \sqrt{16750^2 + 86085^2} = 87705\ \text{N/C}$$

El potencial creado por una carga dq sería

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_c}\theta d\theta$$

El potencial en el punto O por la carga contenida en el conductor será

$$V = \frac{K}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi/3}\theta\, d\theta = \frac{K}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi/3} = 5\,10^{-6}\,9\,10^{9}\,\frac{4\pi^2}{18} = \pi^2\cdot10^4\ \text{voltios}$$

=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XIII

CONDENSADORES

XIII-1. Un condensador de 50 μf se carga bajo una diferencia de potencial de 3000 voltios.

1º) Unimos las armaduras del condensador cargado a las de otro condensador idéntico, pero no cargado, de manera que ambos quedan en paralelo. Calcular la tensión entre las armaduras. Calcular la energía almacenada ahora en el conjunto de los dos condensadores.

2º) Montemos ahora en serie los dos condensadores anteriores y conectemos las armaduras extremas a una fuente de tensión de 3000 voltios. Calcular la cantidad de electricidad y la energía almacenada.

****

1º) La carga del condensador equivalente a los dos montados en paralelo, es unicamente la carga del primero

$$Q = C_1 V_1 = 5\cdot 10^{-5}\cdot 3\cdot 10^{3} = 15\cdot 10^{-2} \text{ culombios}$$

La capacidad equivalente del sistema es

$$C = C_1 + C_2 = 2\cdot 5\cdot 10^{5} = 10^{-4} \text{ faradios}$$

El voltaje del sistema

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{15\cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = 1500 \text{ voltios}$$

y la energía almacenada

$$E = \frac{1}{2}\, QV = \frac{1}{2}\, 15\cdot 10^{-2}\cdot 15\cdot 10^{2} = 112,5 \text{ julios}$$

2º) La capacidad equivalente es

$$C' = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{25\cdot 10^{-10}}{10\cdot 10^{-5}} = 2,5\cdot 10^{-5} \text{ faradios}$$

la carga

$$Q' = C'V' = 2,5\cdot 10^{-5}\cdot 3\cdot 10^{3} = 7,5\cdot 10^{-2} \text{ colombios}$$

y la energía almacenada

$$E = \frac{1}{2}\ Q'V' = \frac{1}{2}\ 7,5\cdot 10^{-2}\cdot 3\cdot 10^{3} = 112,5 \text{ julios}$$

=.=.=.=.=.=.=

XIII-2. Una esfera metálica aislada, de 10 cm. de radio, se carga a un potencial de 1000 voltios; se toca esta esfera con otra, también aislada, de 2 cm. de diámetro que a continuación se descarga; se repite esta operación 5 veces. Determinar:

1º) La carga de la primera esfera antes de ser tocada.
2º) La carga de dicha esfera después de la quinta operación.
3º) Su potencial en este momento.

****

1º) La carga de la primera esfera antes de ser tocada es :

$$Q = CV = 4\ \pi\ \varepsilon_o RV = \frac{1}{9\cdot 10^{9}}\cdot 10^{-1}\cdot 10^{3} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-7} \text{ culombios}$$

2º) Al poner en contacto ambas esferas se igualan sus potenciales. Si llamamos Q_1 y Q_1' a las cargas respectivas de las esferas después del contacto , tendremos :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{Q_1'}{C_2} \quad \text{ó también} \quad \dfrac{Q_1}{R} = \dfrac{Q_1'}{r} \\ \text{además se verifica que} \quad Q_1 + Q_1' = Q \end{array}\right\}$$

tendremos

$$\frac{Q_1}{R} = \frac{Q_1'}{r} = \frac{Q_1 + Q_1'}{R + r} = \frac{Q}{R + r}$$

luego $\quad Q_1 = Q\,\dfrac{R}{R + r}$

después del primer contacto se descarga la esfera de radio 2 cm. y se repite el proceso anterior, siendo la carga inicial de la esfera grande Q_1, por tanto

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Q_2}{R} = \dfrac{Q_2'}{r} \\ Q_2 + Q_2' = Q_1 \end{array}\right\} \quad Q_2 = Q_1\,\frac{R}{R + r} = Q\left(\frac{R}{R + r}\right)^{2}$$

y operando analogamente en los demás contactos, llegaremos a

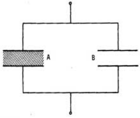
$$Q_5 = Q\left(\frac{R}{R + r}\right)^{5} = \frac{1}{9}\ 10^{-7}\left(\frac{10}{11}\right)^{5} = 7\cdot 10^{-9} \text{ culombios}$$

3º) El potencial será

$$V = \frac{Q_5}{C} = \frac{Q_5}{4\ \pi\ \varepsilon_o R} = 9\cdot 10^{9}\cdot\frac{7\cdot 10^{-9}}{10^{-1}} = 630 \text{ voltios.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-3. dos condensadores idénticos de $10\,\mu F$ de capacidad se conectan en paralelo, cargándose a una tensión de 100 V, después de lo cual se aislan de la batería. A continuación se introduce en uno de los condensadores un dieléctrico (K = 3) que llena completamente el espacio entre placas. Calcular:
a) La carga de cada condensador, antes y después de introducir el dielectrico;
b) La tensión después de introducir el dieléctrico.
c) La energía de cada condensador antes y después de introducir el dieléctrico.



****

a) La diferencia de potencial es la misma para los dos condensadores V = 100 voltios, la carga de cada uno antes de introducir el dieléctrico es

$$Q_A = Q_B = C\,V = 10\cdot 100 = 10^3\ \mu\ C = 10^{-3} \quad \text{culombios}$$

Al introducir el dieléctrico en uno de los condensadores, la capacidad de los condensadores es

$$C'_A = K\ C_A = 3\cdot 10\ \mu f$$

$$C'_B = C_B = 10\ \mu\ f$$

al introducir el dieléctrico la carga total no varía, por tanto

$$\left.\begin{array}{l} Q'_A + Q'_B = 2\cdot 10^{-3} \\ \dfrac{Q'_A}{3\cdot 10} = \dfrac{Q'_B}{10} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Q'_A = 1,5\cdot 10^{-3} \quad \text{culombios} \\ Q'_B = 0,5\cdot 10^{-3} \end{array}$$

b) La tensión después de introducir el dieléctrico es

$$V' = \frac{Q'_A}{C'_A} = \frac{1,5\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-5}} = 50 \quad \text{voltios}$$

c) Energía de cada condensador antes de introducir el dieléctrico

$$E_A = E_B = \frac{1}{2}\,Q\,V = \frac{1}{2}\,10^{-3}\cdot 10^2 = 5\cdot 10^{-2} \quad \text{julios}$$

después de introducir el dieléctrico

$$E'_A = \frac{1}{2}\,Q'_A V' = \frac{1}{2}\,1,5\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10 = 3,75\cdot 10^{-2} \quad \text{julios}$$

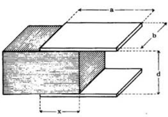
$$E'_B = \frac{1}{2}\,Q'_B\,V' = \frac{1}{2}\,0,5\cdot 10^{-3}\cdot 50 = 1,25\cdot 10^{-2} \quad \text{julios}$$

XIII-4. Una lámina dieléctrica de permitividad ε y espesor d, se introduce parcialmente entre dos placas rectangulares paralelas de dimensiones a y b. La distancia entre las placas es igual al espesor del dieléctrico y su carga es + Q y - Q. Calcular en función de la longitud x del dieléctrico, introducida entre las placas:
1º) La capacidad del condensador así formado.
2º) La energía
3º) La fuerza sobre el dieléctrico.

****

1º) Consideraremos el condensador formado como resultado de asociar dos condensadores en paralelo, por tanto,

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_o \frac{S}{d} + \varepsilon \frac{S'}{d}$$



o sea

$$C = \frac{1}{d}\left[\varepsilon_o b(a-x) + \varepsilon\; bx\right]$$

2º) La energía será

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{d.Q^2}{2\left[\varepsilon_o b(a-x) + \varepsilon\; bx\right]}$$

3º) La energía disminuye al aumentar x y esta energía perdida es igual al trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre el dieléctrico, o sea,

$$-\,dW = F.dx \Rightarrow F = -\frac{dW}{dx} = \frac{d.Q^2 b(\varepsilon - \varepsilon_o)}{2\left[\varepsilon_o b(a-x) + \varepsilon\; bx\right]^2}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-5. Un condensador esférico colocado sobre un soporte aislante, se carga uniendo su armadura interna con un manantial eléctrico, y la externa con tierra. Una vez cargado, se rompen ambas uniones, quedando el condensador aislado. En esta situación, se pone en contacto la armadura interna con tierra, y se pide: 1º) ¿Que carga ha pasado a tierra? 2º) ¿Que potencial tenía el manantial eléctrico que se utilizó. 3º) ¿Que capacidad tiene el condensador?

Datos: La carga que toma el condensador es 10^{-5} culombios. Los radios de las armaduras son $R_1 = 18$ cm y $R_2 = 18,2$ cm. El dielectrico es aire.

****

1º) Una vez cargada la armadura interna con una carga Q y al quedar aislado el condensador se inducirá una carga - Q en la armadura externa. Después al poner la armadura interna a tierra pasarán cargas a tierra quedando la armadura interna a potencial O. Si llamamos q a la carga que queda en la esfera interna, tendremos

$$\frac{q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} = 0 \Rightarrow q = Q\,\frac{R_1}{R_2}$$

y la carga que habrá pasado a tierra será

$$q' = Q - q = Q - Q\,\frac{R_1}{R_2} = Q\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) = 10^{-5}\left(1 - \frac{18}{18,2}\right) = \frac{1}{91}\,10^{-5} \text{ culombios}$$

2º) El potencial del manantial eléctrico será el que tenía inicialmente el condensador, o sea

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1\,R_2} = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-5}\,\frac{(18,2-18)10^{-2}}{18,2\cdot 18\cdot 10^{-4}} = 5494,5 \text{ voltios}$$

3º) La capacidad del condensador es

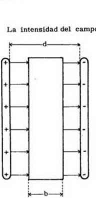
$$C = 4\pi\varepsilon_o\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{1}{9\;10^9}\,\frac{18,2\cdot 18\cdot 10^{-4}}{(18,2-18)10^{-2}} = 1,82\cdot 10^{-9} \text{ faradios}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-6. Una lámina de cobre de espesor, b, se introduce dentro de las láminas planas de un condensador, como se indica en la figura. La lámina de cobre se encuentra situada exactamente en la mitad de la distancia, d. Cuál es la capacidad del condensador antes y después de introducir la lámina?

****

La intensidad del campo eléctrico entre un par de láminas paralelas muy próximas y en el vacio es



$$E = \frac{1}{\varepsilon_o}\sigma = \frac{1}{\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{S}$$

la diferencia del potencial entre placas es

$$V = E\cdot d = \frac{1}{\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{S}\,d$$

la capacidad de un condensador es:

$$C = \frac{q}{V}$$

luego

$$C = \frac{q}{\frac{1}{\varepsilon_o}\cdot\frac{q}{S}\,d} = \frac{1}{\varepsilon_o}\cdot\frac{S}{d}$$

Después de introducir el conductor de cobre: El campo en el conductor es nulo y en el espacio entre las láminas y el conductor el campo es el mismo que antes de introducir el conductor.

La diferencia de potencial entre placas, ahora, es

$$V' = E\,(d-b) = \frac{1}{\varepsilon_o}\,\frac{q}{S}(d-b)$$

y la capacidad del condensador

$$C' = \frac{q}{\frac{1}{\varepsilon_o}\,\frac{q}{S}(d-b)} = \frac{1}{\varepsilon_o}\,\frac{S}{(d-b)}$$

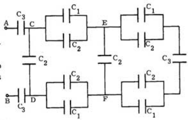
=.=.=.=.=.=

XIII-7. En la figura, las capacidades de los distintos condensadores son: C_1 = 1pf, C_2 = 2pf y C_3 = 3pf. Se pide:

1º) Capacidad equivalente del sistema.

2º) Carga de cada uno de los condensadores próximos a A y B si establecemos una diferencia de potencial V_{AB} = 2700 voltios.

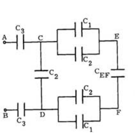
3º) Calcular V_{CD} y V_{EF}.



****

1º) La capacidad equivalente de los condensadores C_1 y C_2 en derivación, es

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 1+2 = 3\text{pf}$$



Entre E y F hay un condensador de C_2 = 2 pf en derivación con otra cuya capacidad es

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

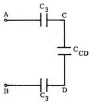
$$C' = 1\text{ pf}$$

luego

$$C_{EF} = C_2 + C' = 2 + 1 = 3\text{pf}$$

Procediendo de forma análoga, entre E y D hay un condensador C_2 y en derivación con él otro de capacidad

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \qquad C'' = 1\,\text{pf}$$



luego

$$C_{CD} = C_2 + C'' = 2 + 1 = 3\ \text{pf.}$$

El condensador equivalente entre A y B será

$$C = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{CD}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1\,\text{pf}$$

2º) La carga del condensador equivalente es

$$Q = CV = 1 \times 2700 = 2700\ \text{pC.}$$

la carga de los tres condensadores de la fig. 3, tienen la misma carga y es igual a la del condensador equivalente

$$Q_3 = Q_{CD} = 2700\ \text{pC.}$$

3º) La diferencia de potencial entre C y D será

$$V_{CD} = \frac{Q_{CD}}{C_{CD}} = \frac{2700}{3} = 900 \quad \text{voltios}$$

también $\qquad V_{CD} = V_{CD} + V_{EF} + V_{FD} \quad$ y $\quad V_{CE} = V_{EF} = V_{FD}$

luego $\qquad V_{EF} = \frac{V_{CD}}{3} = \frac{900}{3} = 300 \quad$ voltios

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-8. Entre las armaduras de un condensador plano constituído por dos discos de R = 40 cm. de radio y separados en el aire d = 4 cm. hay un disco metálico móvil de igual radio y espesor despreciable, que puede desplazarse conservandose paralelo a las armaduras y coaxial con ellas. Una de las armaduras está permanentemente al potencial de V_1 = 1000 v., la otra a V_2 = 10000 v. y el disco móvil al de V = 4000 v.

Calcular la posición de equilibrio del disco móvil y el valor de las fuerzas igual y de sentido contrario que actúan sobre el en esa posición. Razonese si el equilibrio es estable o inestable.

****

Sea F la fuerza con que se atraen las placas de un condensador plano, x la distancia entre placas y supongamos que las placas se aproximan una distancia dx. El trabajo realizado por F será

$$dW = F \cdot dx$$

la energía del condesandor inicialmente es $W = \frac{1}{2}\ Q^2/C = \frac{1}{2}\ \frac{Q^2}{\varepsilon_o S}\ x$

y el incremento experimentado $dW = \frac{1}{2}\ \frac{Q^2}{\varepsilon_o S}\ dx$

luego $F = \frac{1}{2}\ \frac{Q^2}{\varepsilon_o S}$

igualemos las fuerzas que ejercen las armaduras sobre el disco, siendo d_1 y d_2 las distancias respectivas del disco a las armaduras

$$\frac{1}{2}\ \frac{C_1^2(V-V_1)^2}{\varepsilon_o S} = \frac{1}{2}\ \frac{C_2^2(V_2-V)^2}{\varepsilon_o S} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2-V}{V-V_1} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{V_2-V}{V-V_1}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{o sea} & 3000\ d_2 = 6000\ d_1 \\ \text{además} & d_1 + d_2 = 4\end{array}\right\} \quad d_1 = \frac{4}{3}\ \text{cm.} \qquad d_2 = \frac{8}{3}\ \text{cm.}$$

las fuerzas que actúan sobre el disco son

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2}\ \frac{C_1^2(V-V_1^2)}{\varepsilon_o S} = \frac{1}{2}\ \varepsilon_o\ \frac{S(V-V_1^2)}{d_1^2} = \frac{\pi R^2(V-V_1^2)}{8\pi\cdot 9\cdot 10^9\cdot d_1^2}$$

sustituyendo valores

$$F_1 = F_2 = \frac{16\cdot 10^{-2}\cdot 9\cdot 10^6}{8\cdot 9\cdot 10^9\cdot \frac{16}{9}\cdot 10^{-4}} = 0,1125\ \text{N} = 11250 \quad \text{dinas}$$

Si d_1 aumenta F_1 disminuiría. Por el contrario d_2 disminuye y en consecuencia F_2 aumenta. El equilibrio es inestable.

=.=.=.=.=.=.=

XIII-9. Un lago circular de 1000 Km^2 tiene exactamente encima, a una altura de 500 m. una nube tormentosa también circular, de la misma área. El estanque de 2 m. de profundidad, está lleno de agua.

Calcular la energía disipada en el agua en forma de calor, si la nube se descargara totalmente sobre ella, perdiendo toda su carga eléctrica y todo el calor fuera absorbido por el agua. ¿Sería apreciable la elevación de la temperatura experimentada por el agua?

El campo eléctrico existente entre la nube y el estanque es de 100 voltios/m.

****

Podemos considerar como un condensador plano el formado por la superficie del estanque y la nube. La energía del condensador es $E = \frac{1}{2}\ CV^2$

siendo $C = \varepsilon_o\ \frac{S}{d} = \frac{1}{36\pi\cdot 10^9}\ \frac{10^9}{5\cdot 10^2} = \frac{1}{18\cdot 10^3\cdot \pi}$ faradios y $\qquad V = E \cdot d = 100 \cdot 500 = 50000$ voltios

luego $\qquad E = \frac{1}{2}\, C V^2 = \frac{1}{2}\, \frac{1}{18 \cdot 10^3 \pi}\, 25 \cdot 10^8 = 22116$ julios $= 5307,84$ calorias

Teniendo en cuenta que $\qquad Q = m \cdot C_e \cdot \Delta t$

el incremento de temperatura, Δt, experimentado por el agua del lago

$$\Delta t = \frac{Q}{m\, C_e} = \frac{Q}{V \rho\, C_e} = \frac{5307,84}{2 \cdot 10^{12} \cdot 10^3 \cdot 1} = 2,65 \cdot 10^{-12} \text{ grados}$$

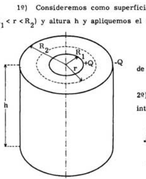
luego la elevación de temperatura sería inapreciable

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-10.Dos cilindros concéntricos, de radios R_1 y R_2 y altura h, forman un condensador y sus armaduras poseen cargas iguales y opuestos + q y -q Calcular: 1º) El valor del campo eléctrico en un punto situado entre las armaduras. 2º) Diferencia de potencial entre las armaduras. 3º) Capacidad del condensador cilíndrico.

****

1º) Consideremos como superficie de Gauss un cilindro de radio $r (R_1 < r < R_2)$ y altura h y apliquemos el teorema de Gauss, tendremos



$$E . 2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

de donde $\quad E = \frac{1}{2\pi\, \varepsilon_o\, h}\, \frac{Q}{r}$

2º) Sabemos que $\quad dV = -\, E\, dr$

integrando

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E\, dr \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\, \varepsilon_o h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\, \varepsilon_o h}\, \ln \frac{R_2}{R_1}$$

3º) La capacidad es

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = 2\pi\, \varepsilon_o\, \frac{h}{\ln R_1 / R_2}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-11.a) Hallar el campo creado por un largo cilindro de radio a y densidad superficial de carga σ

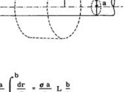
b) Calcular la capacidad, por unidad de longitud, de un condensador formado por dos cilindros coaxiales de radios a y b.

c) Calcular la capacidad por kilómetro de un cable formado por un conductor axial de radio 5 mm. rodeado de un aislante de espesor 3 mm., y recubierto de una lámina métalica. La constante dieléctrica del aislante es 4.

****

a) Tomemos como superficie de Gauss una superficie cilíndrica con el mismo eje que el cilindro dado, una longitud, l cualquiera y radio r. Aplicando el teorma de Gauss, obtendremos

$$2\pi r\cdot 1\cdot E = \frac{Q_i}{\varepsilon_o} = \frac{2\pi a\cdot 1\cdot \sigma}{\varepsilon_o}$$



de donde

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_o}\ \frac{\sigma a}{r}}$$

b) Sabemos que $E = -\frac{dV}{dr}$,

luego la diferencia de potencial entre las armaduras es:

$$V_{ab} = V_a - V_b = -\int_b^a E\,dr = \int_a^b E\,dr = \frac{\sigma a}{\varepsilon_o}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_o}\ L\,\frac{b}{a}$$

y la carga contenida en la unidad de longitud del conductor es $q = 2\pi a\sigma$

Por definición de capacidad

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi a\ \sigma}{\frac{\sigma a}{\varepsilon_o}\ L\,\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{L\,\frac{b}{a}}$$

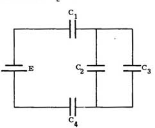
c) La capacidad por Kilómetro del cable es $C = \frac{2\pi\varepsilon l}{L\,\frac{b}{a}}$

o sea $$C = \frac{8\pi\cdot 8,8'5\cdot 10^{-12}\cdot 10^3}{L\,\frac{8}{5}} = \underline{0,473\cdot 10^{-6}\ \text{faradios}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-12.En la figura los cuatro condensadores C_1, C_2, C_3, C_4 de idéntica forma y dimensiones tienen por dieléctrico el aire ($K_1 = 1$), parafina ($K_2 = 2,3$), azufre ($K_3 = 3$) y mica($K_4 = 5$), respectivamente. Calcular en voltios la diferencia de potencial entre las armaduras en cada uno de los cuatro condensadores y expresar en u.e.e. la carga almacenada por cada uno de ellos.

Datos: $E = 100$ vol., $C_2 = 10^{-9}$ faradios.



****

Las capacidades C_1, C_3 y C_4 son:

$$C_1 = \frac{C_2}{2'3} = \frac{1}{2'3} \cdot 10^{-9} \quad \text{faradios}$$

$$C_2 = K_3 \cdot C_1 = \frac{3}{2'3} \cdot 10^{-9} \quad \text{faradios}$$

$$C_4 = K_4 \cdot C_1 = \frac{5}{2'3} \cdot 10^{-9} \quad \text{faradios}$$

La capacidad equivalente de los condensadores C_2 y C_3 es $C_{2,3} = C_2 + C_3$ y la capacidad equivalente del conjunto la obtenemos así:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} + \frac{1}{C_4} \qquad \text{de donde}$$

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot (C_2 + C_3)}{C_1 \cdot C_4 + (C_2 + C_3) \cdot C_4 + C_1 \cdot (C_2 + C_3)} = 3,1 \cdot 10^{-10} \quad \text{faradios}$$

La carga del condensador equivalente sería:

$$Q = C\,V = 3,1 \cdot 10^{-10} \cdot 10^2 = 3,1 \cdot 10^{-8} \quad \text{culombios}$$

Los condensadores C_1 y C_4 están en serie, su carga será:

$$Q_1 = Q_4 = 3,1 \cdot 10^{-8} \quad \text{culombios}$$

las cargas de C_2 y C_3 las calculamos a partir de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{Q_3}{C_3} \\ \\ Q_2 + Q_3 = Q \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} Q_2 = Q\ \dfrac{C_2}{C_2+C_3} = \underline{1,34\cdot 10^{-8}\ \text{culombios}} \\ \\ Q_3 = Q\ \dfrac{C_3}{C_2+C_3} = \underline{1,76\cdot 10^{8}\ \text{culombios}} \end{array}$$

Los potenciales de los cuatro condensadores serán

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{3\cdot 1\cdot 10^{-8}}{\frac{1}{2,3}\cdot 10^{-9}} = \underline{72\ \text{voltios}}$$

$$V_2 = V_3 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{13'4\cdot 10^{-8}}{10^{-9}} = 13,4\ \underline{\text{voltios}}$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{1,34\cdot 10^{-8}}{\frac{5}{2'3}\cdot 10^{-9}} = \underline{14,6\ \text{voltios}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-13.Un condensador está formado por dos discos metálicos planos paralelos, de r = 20 cm. de radio, colocados en el vacio a d = 2 mm. de distancia.

a) Si se carga el condensador a V = 3600 voltios, calcular el campo eléctrico entre las armaduras y la energía total del condensador.

b) Después de cargado, se une un disco con una armadura de otro condensador descargado de igual capacidad, y el otro disco con la otra armadura del mismo, realizando la unión con hilos de gran resistencia. ¿Cuánto vale la nueva diferencia de potencia V' entre las armaduras y cuál es la energía del conjunto de los dos condensadores?¿Que ocurre con la diferencia de energías entre el primer caso y el segundo?

****

a) El campo eléctrico uniforme entre placas de un condensador plano vale

$$E = \frac{V}{d} = \frac{3600}{2\cdot 10^{-3}} = 18\cdot 10^{5}\ \frac{\text{voltios}}{\text{metro}}$$

la capacidad de un condensador plano es

$$C = \varepsilon_o\ \frac{S}{d} = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}} = \frac{\pi\cdot 4\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-3}} = \frac{1}{18}\cdot 10^{-8} \quad \text{faradios}$$

y la energía del condensador es

$$W = \frac{1}{2}\ C\,V^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18}\cdot 10^{-8}\ 36^2\cdot 10^4 = \underline{36\cdot 10^{-4}\ \text{julios}}$$

b) La capacidad equivalente de los dos condensadores es

$$C_T = 2C = \frac{1}{9}\cdot 10^{-8} \quad \text{faradios}$$

y su carga total es igual a la que tenia el primero

$$Q_r = CV = \frac{1}{18}\cdot 10^{-8}\cdot 36\cdot 10^2 = 2\cdot 10^{-6} \quad \text{culombios}$$

la diferencia de potencial es

$$V' = \frac{Q_T}{C_T} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{\frac{1}{9}\cdot 10^{-8}} = \underline{1800 \quad \text{voltios}}$$

y la energía del conjunto

$$W' = \frac{1}{2}\ C_T V^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot 10^{-8}\cdot 18^2\cdot 10^4 = 18\cdot 10^{-4} \quad \text{julios}$$

la diferencia $\Delta W = W - W' = 18\cdot 10^{-4}$ se pierde en forma de calor

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-14. Un electrón se lanza horizontalmente, con una velocidad inicial de v = 1000 Km./seg., a lo largo de la dirección equidistante de las placas de un condensador plano, cuya longitud es l = 50 cm. El electrón cae sobre una pantalla fluorescente vertical situada a una distancia d= = 50 cm., del borde de salida del condensador, sobre la que se mide un desplazamiento vertical del electrón H = 20 cm. La distancia entre placas es d' = 20 cm. Se pide:

1º) Valor del campo eléctrico existente entre las plazas del condensador.
2º) Diferencia de potencial entre dichas placas.
3º) Desplazamiento vertical experimentado por el electrón justamente a la salida de las placas del condensador.

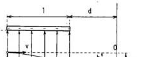
Datos: Carga del electrón $e = 1,6.10^{-19}$ culombios

Datos: Carga del electrón $e = 1,6.10^{-19}$ culombios
Masa " " $m = 9,11.10^{-13}$ Kg.

****

El campo eléctrico, existente entre los planos del condensador, ejerce una fuerza sobre el electrón $F = e\cdot E$, vertical y de sentido contrario al campo. Esta fuerza comunica, al electrón, una aceleración, a, tal, que se verifica:

$$e\ E = m\ a \quad \text{o sea } a = \frac{e\ E}{m}$$



por tanto el movimiento del electrón, en la región entre planos, es parabólico.

Al salir de los planos del condensador, cesará la fuerza debida al campo eléctrico y el movimiento será rectilíneo y uniforme hasta que caiga sobre la pantalla :

por tanto : $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{H-h}{d}$$

como $$v_y = a\,t \quad ; \quad h = \frac{1}{2}a\,t^2 \quad y \quad t = \frac{x}{v} = \frac{l}{v} = \frac{5\cdot 10^{-1}}{10^6} = 5\cdot 10^{-7}\ \text{seg.}$$

tendremos : $$\frac{at}{v} = \frac{H - \frac{1}{2}a\,t^2}{d} \qquad y \qquad a = \frac{v\,H}{t\,d + 1/2\,vt^2}$$

o sea : $$a = \frac{10^6\cdot 2\cdot 10^{-1}}{5\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-1} + 1/2\cdot 10^6\cdot 25\cdot 10^{-14}} = 5,3\cdot 10^{11}\ m/s^2$$

1º) El campo eléctrico será :

$$E = \frac{a\ m_e}{e} = \frac{5,3\cdot 10^{11}\cdot 9,11\cdot 10^{-31}}{1,6\cdot 10^{-19}} \simeq \underline{\underline{3\,\frac{N\,w}{cul.}}}$$

2º) La diferencia de potencial entre planos, valdrá :

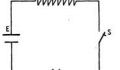
$$V = E\ d' = 3\cdot 2\cdot 10^{-1} = \underline{\underline{0,6\ \text{voltios}}}$$

3º) El desplazamiento vertical experimentado por el electrón justamente a la salida de las placas del condensador , será :

$$h = \frac{1}{2}a\,t^2 = \frac{1}{2}a\,\frac{l^2}{v^2} = \frac{1}{2}5,3\cdot 10^{11}\,\frac{25\cdot 10^{-2}}{10^{12}} = \underline{\underline{6,6\ \text{cm.}}}$$

=.=.=.=.=.=.=

XIII-15. Un circuito eléctrico consta de una batería de f.e.m. E y resistencia R, un condensador de capacidad C y un interruptor S inicialmente abierto. Calcular:



a) La carga del condensador y la intensidad que circula por el circuito en un instante t cualquiera, posterior al cierre del interruptor.

b) El instante t en el que solo falte $\frac{Q}{1000}$ para que el condensador adquiera su carga final Q. Expresión de la intensidad que circula en ese instante.

c) Hallar, en función de t, la energía W_B suministrada por la batería, la energía disipada en la resistencia R y la energía almacenada en el condensador.

d) Calcular las energías anteriores cuando el condensador alcance su carga final.

****

a) Aplicando la ley de Ohm en un instante t en que la carga del condensador sea q, tendremos

$$E - \frac{q}{C} = IR \quad \Rightarrow \quad CE - q = CR\,\frac{dq}{dt}$$

separamos variables en esta última expresión

$$-\frac{dt}{CR} = \frac{dq}{q-CE} \quad \Rightarrow \quad -\int_o^t \frac{dt}{CR} = \int_o^q \frac{dq}{q-CE}$$

de donde

$$-\frac{t}{CR} = \ln(q-CE) - \ln(-CE) = \ln\left[-\frac{q}{CE} + 1\right]$$

o sea

$$e^{-\frac{t}{CR}} = -\frac{q}{CE} + 1 \quad \Rightarrow \quad q = CE\left[1-e^{-t/RC}\right] = Q\left[1-e^{-t/RC}\right]$$

y la intensidad

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E}{R}\, e^{-t/RC}$$

b) La carga final es $Q = CE$ y la diferencia entre la carga final y la que hay en el instante t, será

$$Q - q = Q\, e^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad Q\, e^{-t/RC} = \frac{Q}{10^3} \quad \Rightarrow \quad e^{-t/RC} = 10^{-3}$$

tomando logaritmos neperianos

$$-\frac{t}{RC} = -3\ln 10 = -3 \times 2,3 = -6,9 \quad \Rightarrow \quad t = 6,9\ CR$$

de donde

$$i = \frac{E}{R}\, e^{-6,9}$$

c) En un tiempo t, cualquiera, la energía suministrada por la batería

$$W_B = \int_o^t E\,i\,dt = \frac{E^2}{R}\int_o^t e^{-t/RC}\,dt = -E^2C\left[e^{-t/RC}\right]_o^t = E^2C\left[1-e^{-t/CR}\right]$$

la energía disipada en R

$$W_R = \int_o^t i^2R\,dt = \frac{E^2}{R}\int_o^t e^{-2t/RC}\,dt = -\frac{E^2C}{2}\left[e^{-2t/RC}\right]_o^t = \frac{E^2C}{2}\left[1-e^{-2t/RC}\right]$$

la energía almacenada en el condensador

$$W_C = \int_o^q V\,dq = \int_o^q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{CE^2}{2}\left[1-e^{-t/RC}\right]^2 = \frac{Q^2}{2C}\left[1-e^{-t/RC}\right]^2$$

d) Hay que calcular el valor de las expresiones anteriores para $t \to \infty$

$$W_P = E^2 C$$

$$W_R = \frac{E^2 C}{2}$$

$$W_C = \frac{CE^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIII-16. Las armaduras de un condensador plano distan entre sí d = 2 cm. y el dieléctrico del mismo es el vacío. Por un orificio en la placa positiva entra en el interior del condensador un electrón con una energía W = 5 electrón-voltios, formando la velocidad del electron un ángulo = = 60º con la placa.

¿Qué forma tiene la trayectoria del electrón en el interior del condensador? Si esta trayectoria ha de ser tangente a la otra placa del condensador, calcular cuanto debe valer, en voltios, la diferencia de potencial entre las armaduras y a que distancia x del punto de entrada volverá, en esas condiciones, a incidir el electrón sobre la placa positiva. Se prescindirá de la acción del campo gravitatorio terrestre sobre la masa del electrón.

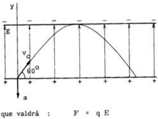
****

La energía cinética del electrón es :

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = qW$$

y su velocidad

$$v_o = \sqrt{\frac{2\,q\,W}{m}}$$



siendo m y q la masa y la carga del electrón respectivamente.
En el interior del condensador actuará, sobre el electrón, una fuerza de sentido contrario al campo electrico, E, que valdrá : $F = q\,E$

y esta fuerza dotará al electrón de una aceleración perpendicular a las placas y en sentido contrario al campo eléctrico existente entre las mismas, su valor es :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{q\,E}{m}$$

Consideremos unos ejes que tengan el origen, O en el orificio de la placa positiva ; OX sea la placa positiva y OY la perpendicular por O a dicha placa. Las ecuaciones paramétricas del movimiento del electrón respecto a éstos ejes son :

$$\left.\begin{aligned} x &= v_o t \cos 60 \\ y &= v_o t \operatorname{sen} 60 - \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}\right\}$$

y la ecuación de la trayectoria :

$$y = x \operatorname{tg} 60 - \frac{1}{2} a \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2 \alpha}$$

que es la ecuación de una parábola.

Si queremos que la trayectoria sea tangente a la placa negativa, la altura máxima ha de ser igual a d = 2 cm. que es la distancia entre placas, ó sea :

$$d = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,a} \qquad \text{de donde} \qquad a = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,d}$$

igualando las dos expresiones de la aceleración obtendremos :

$$E = \frac{m}{q}\,\frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,d}$$

y la diferencia de potencial entre placas :

$$V\text{-}V' = E\cdot d = \frac{m}{q}\,\frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2} = \frac{m}{q}\,\frac{2qW\operatorname{sen}^2\alpha}{2\,m} = W\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{15}{4} = \underline{3{,}75 \text{ voltios.}}$$

la distancia x que nos piden es el alcance máximo en el tiro parabólico.

$$x = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{a} = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{\dfrac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2\,d}} = 2\,d\,\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 4\,\frac{\operatorname{sen} 120}{\operatorname{sen}^2 60} = 4\,\frac{1/2}{3/4} = \underline{2{,}66 \text{ cm.}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XIV

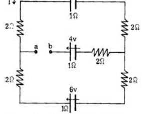
CORRIENTE CONTINUA

XIV-1. 1º) Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b de la figura.

2º) Si conectamos los puntos a y b, ¿qué intensidad de corriente pasa por cada rama del circuito?

****

1º) La intensidad de la única corriente que existe en el circuito es



$$I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{10-6}{1+2+2+1+2+2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\ \text{A}.$$

Aplicando la ley de Ohm generalizada entre a y b

$$V_a - V_b = \sum IR - \sum \varepsilon = -\frac{2}{5}(2+1+2) -$$

$$-(-10+4) = 4 \text{ voltios}$$

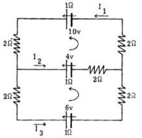
2º) Para calcular I_1, I_2 e I_3, aplicamos las reglas de Kirchoff. Obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 & \text{(I)} \\ 5I_1 + 3I_2 = 10-4 = 6 & \text{(II)} \\ 5I_3 - 3I_2 = 4-6 = -2 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (II), obtenemos: $I_1 = \dfrac{6 - 3I_2}{5}$

De (III) : $I_3 = \dfrac{3I_2 - 2}{5}$

Sustituyendo en (I)



$$\frac{6-3I_2}{5} = I_2 + \frac{3I_2-2}{5} \Rightarrow 6-3I_2 = 5I_2 + 3I_2 - 2 \Rightarrow I_2 = \frac{8}{11}\text{ A.}$$

por tanto

$$I_1 = \frac{42}{55}\text{ A.} \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{2}{55}\text{ A.}$$

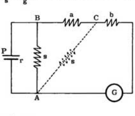
=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-2. En serie con un galvanómetro, G, se establece un circuito con dos resistencias, a y b. Entre los puntos A y B se coloca un shunt de resistencia s y se lee una determinada desviación en el galvanómetro. Colocando el shunt entre A y C el galvanómetro da la misma lectura.

Hay que hallar el valor de la resistencia interior x de la pila sabiendo que la resistencia b = 10 Ω y que el galvanómetro tiene una resistencia de g = 5 Ω

****

Sea E la f. e. m. de la pila, I_p, I_s e I_g las intensidades de las corrientes que pasan por la pila, el shunt y el galvanómetro, cuando el shunt está colocado entre A y B. Aplicando las reglas de Kirchoff, obtendremos



$$\left.\begin{array}{l} \text{(I)}\ I_p = I_s + I_g \\ \text{(II)}\ I_s \cdot S = I_g(a+b+g) \\ \text{(III)}\ E = I_p \cdot r^2 + I_s \cdot s \end{array}\right\}$$

de (II), obtenemos
$$I_s = I_g \frac{a+b+g}{s}$$

de (I)
$$I_p = I_g \frac{a+b+g+s}{s}$$

sustituyendo en (III)

$$E = I_g \frac{(a+b+g)(r+s) + s\,r}{s}$$

Sean I'_p, I'_s e I_g las intensidades del circuito cuando conectemos el shunt entre A y C. Aplicando Kirchoff,

$$\left.\begin{array}{l} I'_p = I'_s + I_g \\ I'_s \cdot s = I_g(b+g) \\ E = I'_p(r+a) + I'_s \cdot s \end{array}\right\}$$

procediendo como en el caso anterior obtenemos

$$E = I_g \frac{(b + g)(s + r + a) + s(r + a)}{s}$$

igualando las dos expresiones de E, nos quedará

$$a(r + s) + s\,r = a(b + g) + s\,r + s\,a$$

simplificando y operando

$$r = b + g = 10 + 5 = \underline{15\,\Omega}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-3. La intensidad de corriente en un hilo varía con el tiempo, según la relación:

$$i = 3t^2 + 2$$

donde i se mide en amperios y t en segundos.

1°) ¿Cuántos culombios pasan por una sección transversal del hilo en el intervalo de tiempo comprendidos entre t = 1 seg. t = 5 seg.

2°) ¿Cuál es la intensidad media durante el mismo intervalo de tiempo?

3°) ¿Cuál es la intensidad eficaz?

****

1º) La intensidad de la corriente en una sección transversal es

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{o sea} \qquad dq = i\,dt$$

por consiguiente, la carga que pasa por una sección transversal en el intervalo de tiempo dado, es

$$q = \int_1^5 i\,dt = \int_1^5 (3t^2 + 2)dt = \left[t^3 + 2t\right]_1^5 = 135\text{-}3 = 132 \quad \text{culombios}$$

2º) La intensidad media en el mismo intervalo

$$i_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i\,dt = \frac{1}{5 - 1} \int_1^5 (3t^2 + 2)dt = \frac{132}{4} = 33 \text{ A.}$$

3º) La intensidad eficaz

$$i_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{4} \int_1^5 (9t^4 + 12t^2 + 4)dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{9t^5}{5} + 4t^3 + 4t\right]_1^5} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{6245 - \frac{49}{5}} = \frac{1}{2} \sqrt{6235{,}2} = 39'5 \text{ A.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-4. El circuito de la figura está formado por dos cuadrados de alambre uniforme y que tienen un lado común. Por el vértice A entra una corriente I que sale por el vértice D. Sabiendo que la longitud de todos los lados de los cuadrados es $l = 4$ cm, se pide: 1°) Demostrar que la intensidad de corriente en el lado común es igual a I/5. 2°) Qué longitud del alambre dado necesitaríamos para construir la resistencia equivalente entre A y D.

****

1º) Apliquemos las reglas de Kirchoff a los nudos A y D y a las mallas ABEF y BCDE

Nudo A: $I_1 + I_2 = I \Rightarrow I_1 = I - I_2$

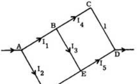
Nudo D: $I_4 + I_5 = I \Rightarrow I_5 = I - I_4$

Malla ABED: $rI_1 + rI_3 - 2rI_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 + I_3 = 2I_2$

Malla BCDE: $2rI_4 - rI_5 - rI_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_3 + I_5 = 2I_4$



Sustituimos en las dos últimas ecuaciones los valores de I_1 e I_2

$$\left.\begin{array}{l} I - I_2 + I_3 = 2I_2 \Rightarrow I_2 = \dfrac{I + I_3}{3} \\ \\ I_3 + I - I_4 = 2I_4 \Rightarrow I_4 = \dfrac{I + I_3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 = I_4$$

Igualmente se demuestra:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 + I_3 = 2I - 2I_1 \Rightarrow I_1 = \dfrac{2I - I_3}{3} \\ \\ I_3 + I_5 = 2I - 2I_5 \Rightarrow I_5 = \dfrac{2I - I_3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 = I_5$$

Ahora, tomemos el nudo B:

$$I_1 = I_3 + I_4 \Rightarrow \frac{2I - I_3}{3} = I_3 + \frac{I + I_3}{3} \Rightarrow I_3 = \frac{I}{5}$$

2º) Llamemos R_e a la resistencia equivalente entre A y D. Se verificará

$$I \cdot R_e = I_1 \cdot r + I_4 \cdot 2r$$

pero $I_1 = \frac{2I - I/5}{3} = \frac{9I}{15}$ e $I_4 = \frac{I + I/5}{3} = \frac{6I}{15}$

luego $I.R_e = \frac{9I}{15} r + \frac{6I}{15} 2r = \frac{21}{15} Ir = \frac{7}{5} Ir \Rightarrow R_e = \frac{7}{5} r$

o sea $\rho \frac{l}{s} = \frac{7}{5} \rho \frac{4}{s} \Rightarrow l = \frac{28}{5} = 5'6$ cm.

=.=.=.=.=.=.=.=

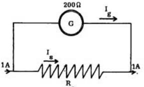
XIV-5. Disponemos de un galvanómetro cuya escala está calculada para una intensidad máxima de 2.10^{-4} A. y cuya resistencia vale $R = 200\,\Omega$.

a) Calcular el shunt que debemos colocar para utilizarlo como amperímetro que mida hasta 1 A.

b) Calcular la resistencia que hemos de añadir en serie para utilizarlo como voltímetro y poder medir hasta 100 voltios.

****

a) Si queremos medir intensidades de 1A y, por el galvanómetro solamente pueden pasar intensidades de $2\cdot10^{-4}$ A, por el shuut pasaran intensidades



$$I_s = 1 - 2\cdot10^{-4} = 10^{-4}(10^4 - 2)\text{ A}$$

Igualando diferencias de potencial en el galvanómetro y shunt, tendremos

$$2\cdot10^{-4}\cdot 200 = 10^{-4}(10^4 - 2)\, R_s$$

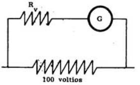
de donde

$$R_s = \frac{400}{10^4 - 2} \simeq 0,04\ \Omega$$

b) Como por el galvanómetro pasa una intensidad máxima de $I_g = 2\cdot10^{-4}$ A, la diferencia de potencial entre sus extremos es

$$V_g = 200\cdot2\cdot10^{-4} = 4\cdot10^{-2} \text{ voltios}$$

para medir diferencias de potencial de 100 voltios habrá que poner en serie con el galvanómetro una resistencia R_v que verifique



$$4\cdot10^{-2} + 4\cdot10^{-4} R_v = 100$$

$$R_v = \frac{99,96}{4\cdot10^{-4}} = 249.900\ \Omega$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-6. Realizamos un montaje que comprende: una batería de acumuladores, un reostato y un amperímetro; entre los bornes de la batería conectamos un voltímetro.

Para distintos valores de la resistencia del reostato hacemos las siguientes lecturas

amperímetro	4,70	3,50	2,15	1,45	0	Amperios
voltímetro	15,30	16,45	17,85	18,60	20	Voltios

Se pide:

a) Construir y estudiar la curva que representa la diferencia potencial en función de la intensidad.

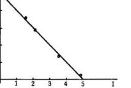
b) Deducir la f.e.m. de la batería

c) Calcular la resistencia interior de la batería

Montamos la anterior batería en serie con un motor, un amperímetro de resistencia despreciable y una resistencia R de 5Ω que sumergimos en un calorímetro. Si impedimos que el motor gire observamos que en 5 minutos la resistencia R desprende 1.440 calorías; y si permitimos que el motor gire sólo se desprenden 90 calorías en el mismo tiempo. Calcular la fuerza contraelectromotriz del motor.

****

a) Llevando a unos ejes coordenadas IOV las distintas medidas del amperímetro y el voltímetro obtendremos una recta bastante ajustada a estos valores.



Podremos tomar como pendiente el valor

$$m = \frac{16,45-17,85}{3,50-2,15} = -1,03 \simeq -1$$

ademas la ordenada en el origen es

$$b = 20$$

la ecuación de la recta, será

$$V = mI + b = -I + 20$$

b y c) La diferencia de potencial en bornes de un generador es

$$V = \varepsilon - Ir$$

identificando las dos expresiones de V, obtendremos

$$20 - I = \varepsilon - Ir \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon = 20 \quad \text{voltios} \\ r = 1 \end{cases}$$

La cantidad de calor desprendida en la resistencia R es

$$Q = 0,24\, I_1^2\, Rt$$

de donde

$$I_1 = \sqrt{\frac{Q}{0,24\, Rt}} = \sqrt{\frac{1\cdot 440}{0,24 \times 5 \times 300}} = 2\,\text{A}.$$

Cuando el motor no gira, el motor no tiene fuerza contraelectromotriz. Aplicando la ley de Ohm al circuito, obtendremos

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + r + r'} = \frac{20}{5 + 1 + r'} = 2 \Rightarrow r' = 4\ \Omega$$

El calor desprendido en R cuando el motor gira, será

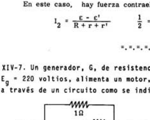
$$Q' = 0,24\ I_2^2 R t \Rightarrow I_2 = \sqrt{\frac{90}{0,24 \cdot 5 \cdot 300}} = \frac{1}{2} = 0,5\ \text{A.}$$

En este caso, hay fuerza contraelectromotriz en el motor

$$I_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'} \qquad \frac{1}{2} = \frac{20 - \varepsilon'}{10} \Rightarrow \varepsilon' = 15 \text{ voltios}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-7. Un generador, G, de resistencia interior $r_g = 0,19\Omega$ y f.e.m. $E_g = 220$ voltios, alimenta un motor, M, resistencia interior $r_m = 0,21\Omega$, a través de un circuito como se indica en la figura. En estas condiciones el motor absorbe 25 amperios.



Calcular:
1º) La fuerza contraelectromotriz del motor.
2º) Las diferencias de potencial en los bornes del generador y en los bornes del motor.
3º) Las potencias que desarrollan el generador y el motor.
4º) Los rendimientos del generador y del receptor.
5º) Las pérdidas por efecto Joule en el generador, en la línea y en el receptor.
6º) Si el Kw-h, cuesta 0,30 ptas, ¿cuánto valen las pérdidas en un mes, si la instalación funciona ocho horas durante veinticinco días?

****

1º) Calculemos la resitencia R_e equivalente a la parte superior del circuito cuito

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{0'6} + \frac{1}{0'7} \qquad R_1 = \frac{21}{65}\ \Omega$$

$$R_1' = \frac{21}{65} + 0,5 = \frac{107}{130}$$

$$\frac{1}{R_e} = 1 + \frac{130}{107} = \frac{237}{107} \quad \text{y} \quad R_e = \frac{107}{237}\ \Omega$$

la resistencia total de la línea será:

$$R_r = R + R_e = 0,1486 + \frac{107}{237} = 0,6\ \Omega$$

Apliquemos la ley de Ohm al circuito

$$I = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{E_g - E_m}{r_g + r_m + R_T} = \frac{220 - E_m}{0,19 + 0,21 + 0,6} = 25\text{A}$$

de donde $220 - E_m = 25$ y $\boxed{E_m = 195 \text{ vol.}}$

2º) La diferencia de potencial en bornes del generador será:

$$V = E_g - I r_g = 220 - 25 \cdot 0,19 = \underline{215,25 \text{ vol.}}$$

y en los bornes del motor

$$V' = E_m + I \cdot r_m = 195 + 25 \cdot 0,21 = \underline{200,25 \text{ vol.}}$$

3º) Las potencias que desarrollan el generador y el motor serán

$$P_g = E_g \cdot I = 220 \cdot 25 = \underline{5.500 \text{ wat.}}$$

$$P_m = E_m \cdot I = 195 \cdot 25 = \underline{4.875 \text{ wat.}}$$

Rendimiento del generador

$$\eta_g = \frac{P_u}{P_g} = \frac{V \cdot I}{E_g \cdot I} = \frac{V}{E_g} = \frac{215,25}{220} = \underline{0,978}$$

y el rendimiento del motor

$$\eta_m = \frac{P_u}{P_m} = \frac{E_m \cdot I}{V' \cdot I} = \frac{E_m}{V'} = \frac{195}{200,25} = \underline{0,973}$$

5º) Potencia perdida en el generador

$$P_1 = I^2 r_g = 625 \cdot 0,19 = \underline{118,75 \text{ wat.}}$$

en el receptor (motor)

$$P_2 = I^2 \cdot r_m = 625 \cdot 0,21 = \underline{131,25 \text{ wat.}}$$

en la línea

$$P_3 = I^2 \cdot R_T = 625 \cdot 0,6 = \underline{375 \text{ wat.}}$$

6º) La potencia total perdida será

$$P_r = P_1 + P_2 + P_3 = 118,75 + 131,25 + 375 = 625 \text{ wat} = 0,625 \text{ Kw.}$$

el coste de las pérdidas será

$$C = 0,625 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 0,3 = \underline{37'50 \text{ ptas}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-8. Un salto de agua tiene un caudal de 6 m^3 por segundo y una altura de 25 m. Calcúlese su potencia en Kw. y en C.V.

Este salto acciona una turbina cuyo rendimiento es 4/5 y esta turbina mueve una dínamo cuyo rendimiento es 5/6. La corriente producida por la dínamo se transporta a un lugar distante 5 Km. La tensión entre los bornes de la dínamo es de 10.000 voltios. Se pide:

a) Potencia en Kw. disponible en los bornes de la dínamo.
b) La resistencia interior de ésta.
c) El diámetro del hilo de cobre que debe utilizarse en el transporte sabiendo que la potencia disipada en la línea no debe ser superior al 10% de la potencia disponible en los bornes de la turbina.
d) El peso del cobre empleado en la línea.

Datos: Resistividad del cobre $1{,}6\cdot 10^{-6}\ \Omega$ cm.; peso específico del cobre 8,9 g/cm^3

****

a) La potencia total del salto de agua es

$$P_t = 6000 \cdot 25 \cdot 9{,}8 = 1470\cdot 10^3 \text{ w.} = 1470 \text{ Kw.}$$

La potencia útil de la turbina

$$P_t = \frac{4}{5}\ 1470 = 1.176 \text{ Kw.}$$

La potencia disponible en bornes de la dínamo

$$P_d = \frac{5}{6}\ 1.176 = 980 \text{ Kw.}$$

b) La potencia perdida en la dínamo es $P_p = P_t - P_d = 1176 - 980 = 196$ Kw.

por tanto $$I^2 r = 196\cdot 10^3$$

además $$VI = 10^4 I = 980\cdot 10^3$$

de donde $$I = 98\,A \quad \text{y} \quad r = 20{,}4\ \Omega$$

c) La potencia máxima que puede disiparse en la línea es

$$P = \frac{10}{100}\ P_d = \frac{1}{10}\ 980 = 98 \text{ Kw.}$$

por tanto $$I^2 R = 98\cdot 10^3 \Rightarrow R = \frac{98\cdot 10^3}{98^2} = \frac{10^3}{98}$$

como $$R = \rho\,\frac{l}{s}$$

$$S = \frac{\rho L}{R} = \frac{1\cdot 6\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 5\cdot 10^5}{10^3/98} = 0{,}156 \text{ cm}^2$$

el diámetro valdrá

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{0{,}624}{3{,}14}} = 0{,}44 \text{ cm.}$$

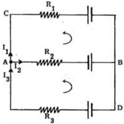
d) El peso del cobre será

$$P = s\cdot l\cdot \rho = 0{,}156\cdot 2\cdot 5\cdot 10^5\cdot 8{,}9 \text{ gr.} = 1388{,}4 \text{ Kg.}$$

XIV-9. Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B a través de las tres ramas conectadas entre ellos. Los generadores son de 3 voltios de f.e.m. y 1 Ω de resistencia interna. $R_1 = 3\,\Omega$; $R_2 = 1\,\Omega$ y $R_3 = 5\,\Omega$.

****

Apliquemos las reglas de Kirchoff para calcular las tres intensidades de corriente en el circuito.



Nudo A $\quad I_1 + I_2 = I_3$

malla ABCA $\quad 6 = 2I_2 - 4I_1$

Malla ABDA $\quad 6 = 2I_2 + 6I_3$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones, son:

$$I_1 = -\frac{9}{11}\text{ A} \qquad I_2 = \frac{15}{11}\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{6}{11}\text{ A.}$$

Apliquemos la ley de Ohm generalizada a lo largo de las tres ramas

Rama ACB $\quad V_A - V_B = 4I_1 + 3 = -\frac{36}{11} + 3 = -\frac{3}{11}$ voltios

" AB $\quad V_A - V_B = 2I_2 - 3 = \frac{30}{11} - 3 = -\frac{3}{11}$ voltios

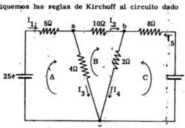
" ADB $\quad V_A - V_B = -6I_3 + 3 = -\frac{36}{11} + 3 = -\frac{3}{11}$ voltios

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-10. Resolver el circuito de la figura adjunta: a) Calculando las diferencias de potencial V_{ab}, V_{bo}, V_{bo} b) Intensidades que circulan por las distintas ramas.

****

b) Apliquemos las reglas de Kirchoff al circuito dado



$$\left.\begin{array}{lll} \text{Nudo a} & & I_2 + I_3 = I_1 \\ \text{Nudo b} & & I_2 + I_5 = I_4 \\ \text{Malla A} & & 5I_1 + 4I_3 = 25 \\ \text{"} & \text{B} & 10I_2 + 2I_4 - 4I_3 = 0 \\ \text{"} & \text{C} & 8I_5 + 2I_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Al resolver el sistema se obtienen las siguientes soluciones

$$I_1 = \frac{955}{311}\text{ A} \quad I_2 = \frac{205}{311}\text{ A.} \quad I_3 = \frac{750}{311}\text{ A.} \quad I_4 = \frac{475}{311}\text{ A} \quad I_5 = \frac{270}{311}\text{ A.}$$

a) La diferencia de potencial entre a y b es

$$V_{ab} = 10\, I_2 = \frac{2050}{311} = 659{,}16 \quad \text{voltios}$$

entre a y 0 es

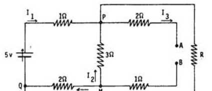
$$V_{ao} = 4\, I_3 = \frac{3000}{311} = 964{,}62 \quad \text{voltios}$$

y

$$V_{bo} = 2\, I_4 = \frac{950}{311} = 305{,}46 \quad \text{voltios}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-11. Dado el circuito de la figura, calcular la f.e.m. de la pila que hay que colocar entre los puntos A y B para que no circule corriente a través de la resistencia R.



****

Al no pasar corriente por la resistencia R, $V_P - V_Q = 0$

por tanto $V_P - V_Q = 5 - I_1 \cdot 1 = 0$ de donde $I_1 = 5$ A.

además $\quad -3I_2 + 2I_1 = 0 \qquad$ luego $\qquad I_2 = \frac{10}{3}$ A.

como $\quad I_3 = I_1 + I_2 \qquad$ quedará $\qquad I_3 = \frac{25}{3}$ A.

aplicando la segunda regla de Kirchoff a la malla ABMP, tendremos

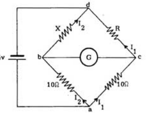
$$E = 3I_3 + I_2 = 25 + 10 = \underline{35\ v.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-12.a) Calcular la resistencia X de la fig. si G' no marca diferencia de potencial y la resistencia $R = 20\Omega$.

b) Calentamos R, y entonces G' marca una diferencia de $\frac{1}{30}$ Vol.sin que pase por él corriente. Calcular Δt, sabiendo $R = R_o(1 + \alpha\Delta t)$; $\alpha = \frac{1}{273}$

****



a) Al no marcar, G', diferencia de potencial $V_b = V_c$

y por tanto $\begin{cases} V_{ab} = V_{ac} \\ V_{bd} = V_{cd} \end{cases}$

además $\begin{cases} I_1 = I_2 \\ I_3 = I_4 \end{cases}$ ya que $I_g = 0$

luego $\left\{\begin{matrix} 10I_1 = 10I_3 \\ I_1R = I_3X \end{matrix}\right\} \begin{matrix} I_1 = I_3 \\ X = R = \underline{20\,\Omega} \end{matrix}$

La diferencia de potencial entre a y b por el camino abd es

$$30I_2 = 4 \Rightarrow I_2 = \frac{2}{15}\text{ A.}$$

Además

$$\left.\begin{matrix} V_a - V_b = \frac{2}{15}\,10 = \frac{4}{3} \\ \\ V_a - V_c = 10I_1 \end{matrix}\right\} \quad V_c - V_d = \frac{4}{3} - 10I_1 = \frac{1}{30} \Rightarrow I_1 = \frac{13}{100}$$

luego

$$\frac{13}{100}(10 + R) = 4 \Rightarrow R = 20{,}76\ \Omega$$

por tanto

$$\Delta t = \frac{R - R_o}{\alpha R_o} = \frac{20{,}76 - 20}{\frac{1}{273}\ 20} = 10{,}37^{\circ}\text{C.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-13. En un circuito están conectados en serie un voltámetro, con disolución de nitrato de plata, y un galvanómetro de resistencia $R_1 = 0{,}92\,\Omega$ cuya escala indicadora está dispuesta en divisiones de 2 miliamperios cada una, estando dicho galvanómetro shuntado con una resistencia $R_2 = 0{,}08\,\Omega$. Al cabo de 2 horas 40 minutos y 50 segundos se depositan en el cátodo del voltámetro 32,37 gr. de plata, y la escala del galvanómetro marca entonces 114 divisiones. Sabiendo que el equivalente químico de la plata es 107,9, se pide: 1º) Error absoluto del galvanómetro en miliamperios; 2º) Error relativo del galvanómetro.

****

1º) Apliquemos la ley de Faraday para calcular la intensidad que pasa por el voltámetro

$$I = \frac{m.F}{E_q.\,t} = \frac{32,37 \cdot 96500}{107,9 \cdot 9650} = 3\ \text{A.}$$

Sean, I_g e I_s, las intensidades de corriente que pasan por galvanómetro y shunt respectivamente, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} I_g + I_s = I \\ I_g \cdot R_1 = I_s \cdot R_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_g + I_s = 3 \\ 0'92\ I_g = 0,08 I_s \end{array}$$

operemos

$$I_g + \frac{92 I_g}{8} = 3 \quad \text{o sea} \quad I_g = \frac{24}{100} = 0,24\ \text{A.}$$

la intensidad que marca el galvanómetro es

$$I'_g = 114 \cdot 0,002 = 0,228\ \text{A.}$$

El error absoluto del aparato es

$$E = I'_g - I_g = 0,228 - 0,240 = \underline{-\ 0,012\ \text{A.}}$$

el error relativo

$$\varepsilon = \frac{E}{I_g} = \frac{0,012}{0'24} = 0,05$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIV-14. Un circuito comprende:

a) Doce acumuladores, cada uno con una f.e.m. $e = 2$ voltios y una resistencia interna $r = 0{,}3\,\Omega$, agrupados en tres series de a cuatro elementos montados en paralelo.

b) Una cuba electrolítica que contiene disolución de sulfato cúprico en la que se sumergen los electrodos de cobre; la resistencia de la cuba es $0{,}9\,\Omega$.

c) Un pequeño motor.

Se pide lo siguiente:

1º) Cuando el motor está inmovilizado, el peso de cobre depositado es de 2,56 g. en 32 minutos 10 segundo. ¿Cuánto vale la resistencia del motor?

2°) Cuando el motor gira, el peso de cobre depositado en el mismo tiempo es de 0,96 g. ¿Cuánto vale la fuerza contraelectromotriz del motor? ¿Cuánto vale su potencia? ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus bornes?

3°) Quitamos el motor y agrupamos los doce acumuladores de tal manera que nos proporcionen el máximo depósito de cobre en un tiempo dado. ¿Cómo hemos de agruparlos? Cu = 64

****

1º) Llamemos s al número de series y n al número de acumuladores de cada serie. Podemos considerar el sistema de acumuladores reducido a un solo generador de f.e.m. $\varepsilon = ne$ y resistencia interna $r_i = \frac{nr}{s}$. La intensidad de la corriente suministrada al circuito exterior será:

$$I = \frac{ne}{\frac{nr}{s} + R_m + R_c} = \frac{8}{0,4+0,9+R_m} = \frac{8}{1,3+R_m}$$

para calcular I, apliquemos la ley de Faraday: $m = \frac{M.I.t}{\alpha.96500}$

de donde $$I = \frac{2 \times 2,56 \times 96500}{64 \times 1930} = 4\,\text{A}$$

por tanto $$R_m = \frac{8 - 4 \times 1,3}{4} = 0,7\,\Omega$$

2º) Hay que tener en cuenta la f.c.e.m ε' del motor

$$I' = \frac{ne - \varepsilon}{0,4+0,9+0,7} = \frac{8-\varepsilon'}{2}$$

por la ley de Faraday

$$\frac{m}{m'} = \frac{I}{I'} \Rightarrow I' = I\frac{m'}{m} = 4\,\frac{0,96}{2,56} = 1,5\,\text{A}$$

de donde

$$\varepsilon' = 8 - 1,5 \times 2 = 5 \text{ voltios}$$

la potencia del motor es

$$P = \varepsilon' I' = 5 \times 1,5 = 7,5 \text{ watios}$$

y la diferencia de potencial en bornes del motor

$$V' = \varepsilon' + I'R_m = 5 + 1,5 \times 0,7 = 6,05 \text{ voltios}$$

3º) La cantidad de cobre depositada es proporcional a la intensidad y, por tanto, calcularemos la forma de agrupar los $N = n{\cdot}s = 12$ elementos de que disponemos para conseguir que por la cuba pase la intensidad máxima.

$$I = \frac{ne}{\frac{nr}{s} + R_c} = \frac{nse}{nr + s.R_c} = \frac{Ne}{nr + sR_c}$$

como el numerador es constante, la intensidad será máxima cuando el denominador sea un mínimo

$$D = n r + s R_c = r \frac{N}{s} + s R_c$$

derivando

$$D' = - \frac{r N}{s^2} + R_c = - \frac{r n s}{s^2} + R_c = - \frac{r n}{s} + R_c = 0 \Rightarrow r n = R_c . s$$

aplicando la última expresión a nuestro problema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{s} = \frac{0,9}{0,3} = 3 \\ N = s\, n = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 6 \\ s = 2 \end{array}\right.$$

y

hay que agrupar los elementos en dos series de seis elementos.

=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XV

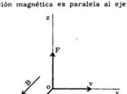
ELECTROMAGNETISMO

XV-1. Se lanza un electrón, carga $1,6\cdot10^{-19}$ culombios, en un campo magnético uniforme con una velocidad de $1,5\cdot10^{7}$ $m.s^{-1}$ a lo largo del eje OX, encontrandose que no actúa ninguna fuerza sobre la carga. Cuando la carga se mueve a la misma velocidad, pero en la dirección positiva del eje OY, la fuerza ejecida sobre la carga es de $3,2\cdot10^{-8}$ dinas, estando dirigida dicha fuerza en el sentido positivo del eje OZ. Determinar el vector inducción, B, en módulo, dirección y sentido.

****

La fuerza sobre una carga en movimiento en una región donde existe un campo magnético es: $\vec{F} = q\left[\vec{v}\cdot\vec{B}\right]$

para que $F = 0$ los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ han de ser paralelos y por tanto la inducción magnética es paralela al eje OX.



Cuando la partícula se mueve en la dirección positiva del eje OY, la fuerza es

$$\vec{F} = -q\left[\vec{v}\cdot\vec{B}\right]$$

como $\vec{F}$ está dirigida en el sentido positivo del eje OZ, el sentido de la inducción magnética B es el del eje OX positivo.

El módulo de $\vec{F}$ es $F = q\cdot v\cdot B$

luego

$$B = \frac{F}{q\,v} = \frac{3,2\cdot 10^{-13}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 1,5\cdot 10^{7}} = 0,133 \text{ Teslas}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

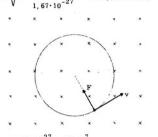
XV-2. Un protón, que es acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de $2\cdot 10^6$ voltios, penetra perpendicularmente al campo magnético uniforme existente en una región. Si B = 0,2 teslas, calcular: a) El radio de la órbita, b) la velocidad del protón en ella, c) el tiempo que tarda en describir una órbita completa. Datos: Masa del protón = $= 1,67\cdot 10^{-27}$ Kg., carga del protón = $1,6\cdot 10^{-19}$ culombios

****

a y b) La velocidad adquirida por el protón al ser acelerado por una diferencia de potencial es

$$e.V = \frac{1}{2}m\,v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,e\,V}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^{6}}{1,67\cdot 10^{-27}}} = 1,95\cdot 10^{7}\text{m.s}^{-1}$$

Al entrar el protón en la región donde existe un campo magnético, se mueve bajo la acción de una fuerza constante y cuya dirección es siempre perpendicular a la velocidad del protón. La órbita es, por tanto, circular de velocidad constante v, luego



$$\frac{m\,v^2}{R} = q\,v\,B \Rightarrow R = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{1,67\cdot 10^{-27}\cdot 1,95\cdot 10^{7}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^{-1}} = 1,01 \text{ m}$$

c) El tiempo que tarda el protón en recorrer una órbita es

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\cdot 1,01}{1,95\cdot 10^{7}} = 3,25\cdot 10^{-7} \text{ seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XV-3. Dos hilos muy largos O y O' rectilíneos y paralelos, distan entre sí 10 cm. El hilo O' está recorrido por una corriente I' = 6 A. dirigida de arriba a abajo:

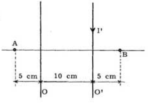
1º) Determinar la intensidad y la dirección de la corriente I que recorre el hilo O, para que el campo magnético en el punto A de la figura sea nula.

2º) ¿Cual es entonces el campo magnético resultante en magnitud, dirección y sentido en el punto B, y en un punto C distante 6 cm. del hilo O y 8 cm del hilo O'?

****

1º) El campo magnético creado por el conductor O' en A es perpendicular y hacia adentro al plano de la figura y su valor es

$$B'_A = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I'}{d'}.$$



El campo creado por el conductor O en A', será

$$B_A = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{d}$$

y ha de ser igual en módulo y de sentido contrario a B'_A, o sea

$$\frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I'}{d'} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = I'\frac{d}{d'} = 6\,\frac{5}{15} = 2\text{ A}.$$

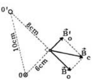
y el sentido de la corriente es de abajo a arriba

2º) El campo resultante en B será

$$B_B = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I'}{d_1} - \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I}{d'_1} = \frac{\mu_o}{2\pi}\left[\frac{6}{5\cdot 10^{-2}} - \frac{2}{15\cdot 10^{-2}}\right] = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\,\frac{16}{15\cdot 10^{-2}} =$$

$$= 2,13\cdot 10^{-5}\ \text{tesla}$$

su dirección es perpendicular al plano del dibujo y hacia afuera del papel.



El campo creado en C por el conductor O, es:

$$B_o = \frac{\mu_o}{2\pi}\,\frac{2}{6\cdot 10^{-2}} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\,\frac{2}{6\cdot 10^{-2}} = \frac{2}{3}\,10^{-5}\,\text{T}$$

El creado por O', es:

$$B'_o = \frac{\mu_o}{2\pi}\,\frac{6}{8\cdot 10^{-2}} = \frac{4\pi\cdot 10^{-2}}{2\pi}\,\frac{6}{8\cdot 10^{-2}} = \frac{3}{2}\,10^{-5}\,\text{T}$$

El campo magnético resultante en C, será

$$B_C = \sqrt{B_o^2 + B_{o'}^2} = 10^{-5}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{9}{4}} = 1,6\cdot 10^{-5}\ \text{tesla}$$

=.=.=.=.=.=.=

XV-4. Una espira rectangular de dimensiones a = 5 cm. y b = 10 cm. recorrida por una intensidad de corriente I = 3 A. está unida rígidamente a una barra que puede girar alrededor de un eje horizontal. En el otro extremo de la barra se cuelga un platillo que equilibra el peso de la espira. En estas condiciones se crea un campo electromagnético, B, uniforme y horizontal en el sentido indicado en la figura y hemos de añadir p = = 3 gr. en el platillo para que la barra permanezca en equilibrio. ¿Calcular el valor de B? Dato: d = 25 cm.

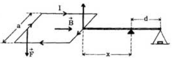
****

El campo B crea, sobre los lados de longitud a, dos fuerzas iguales y de sentido contrario, cuyo módulo es

$$F = I \cdot a \cdot B$$

el momento del par de fuerzas es

$$M = I \cdot a \cdot B \cdot b$$



Igualando al momento del peso p respecto al eje

$$I \cdot B \cdot a \cdot b = p \cdot d \Rightarrow B = \frac{p \cdot d}{I \cdot a \cdot b}$$

sustituyendo valores

$$B = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 9'8 \cdot 25 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0,49 \text{ teslas}$$

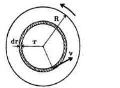
=.=.=.=.=.=.=.=

XV-5. Un disco de radio R = 2π cm. está uniformemente cargado, siendo su carga total Q = 5μC. ¿Cuál será la inducción magnética en el centro del disco, si lo hacemos girar a una velocidad de 200 rev/seg.?

****

Descompongamos el disco en coronas circulares de espesor dr. La carga elemental de cada corona será

$$dq = \sigma\, dS = \frac{Q}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2Qr}{R^2} \cdot dr$$



la velocidad lineal de dicha carga es

$$v = \omega r = 2\pi N r$$

La inducción magnética creada en el centro del disco por cada dq, será

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{dq \cdot V}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi r^2} \cdot \frac{2Qr}{R^2}\, 2\pi N r\, dr = \mu_o \cdot \frac{QN}{R^2} \cdot dr$$

Integrando

$$B = \mu_o \cdot \frac{QN}{R^2} \cdot \int_o^R dr = \mu_o \cdot \frac{QN}{R}$$

sustituyendo valores

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^2}{2\pi \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ tesla}$$

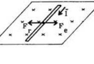
=.=.=.=.=.=.=.=

XV-6. Una varilla de 140 gr. y 30 cm. de longitud está apoyada sobre una superficie horizontal, siendo el coeficiente estático de rozamiento entre ambos 0,5. Si la varilla es recorrida por una corriente de 12 A, calcular: a) el valor númerico del vector inducción magnética que hace que la varilla empiece a deslizar. b) ¿cuál es la dirección de dicho vector?
$g = 10\ m/s^2$

****

a) La fuerza necesaria para que la varilla empiece a deslizar vale

$$F_r = \mu \cdot m \cdot g$$



La fuerza que actua sobre un conductor rectilineo que se encuentra en un lugar donde existe un campo electromagnético, vale

$$F_e = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha$$

igualamos los dos fuerzas y hagamos $\text{sen}\,\alpha = 1$, o sea $\alpha = 90°$, para B sea mínimo y obtendremos

$$\mu \cdot m \cdot g = I \cdot l \cdot B$$

de donde

$$B = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{I \cdot l} = \frac{0,5 \cdot 1,4}{12 \cdot 0'3} = 0,19 \ \text{tesla}$$

b) La dirección del vector inducción magnética es perpendicular a la superficie horizontal sobre la que se apoya la varilla.

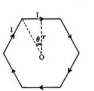
=.=.=.=.=.=.=.=

XV-7. 1°) Calcular la inducción magnetica en el centro de un exágono regular de lado l recorrido por una corriente de intensidad I Amperios 2°) Calcular esta intensidad en un punto P sobre la perpendicular en O al plano del exágono, cuando OP = d. Caso particular d = l.

****

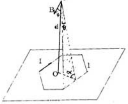
1º) Cada uno de los lados crea en O una inducción magnética que se calculará así

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\cos\alpha \ d(r\ \text{tg}\alpha)}{\frac{r}{\cos\alpha}} = \frac{\mu_0\ I\,\text{sen}\theta}{2\pi r}$$



Teniendo en cuenta que son 6 lados y además que $\theta = 30°$ y $r = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$$B_T = 6B = \frac{3\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0\ I\sqrt{3}}{\pi l}$$



2º) En este caso aplicamos la fórmula antes deducida

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \operatorname{sen}\theta}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

pero sustituyendo r por $\sqrt{r^2 + d^2}$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1/2}{\sqrt{r^2 + d^2 + l^2/4}} \quad \frac{1}{2\sqrt{d^2 + l^2}}$$

además B forma con OP un ángulo α, tal que $\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{d^2 + l^2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2\sqrt{d^2 + l^2}}$

$$B_T = 6\, B \cos\varphi = 6\,\frac{\mu_0\, I\, l}{4\pi \cdot \sqrt{d^2 + l^2}\,\sqrt{d^2 + l^2}} \quad \frac{l\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{d^2 + l^2}} = \frac{3\sqrt{3}\,\mu_0\, I\, l^2}{4\pi \cdot (d^2 + l^2)^{3/2}}$$

si l = d, tendremos

$$B = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \mu_0 \cdot I \cdot l^2}{4\pi \cdot (2 \cdot l^2)^{3/2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}\,\mu_0\, I}{8\pi \cdot \sqrt{2}\, l}$$

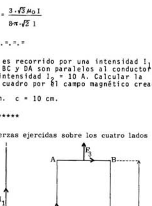
=.=.=.=.=.=.=

XV-8. Un hilo rectilíneo muy largo es recorrido por una intensidad I_1 = 30 A. Un cuadro ABCD, cuyos lados BC y DA son paralelos al conductor rectilíneo, está recorrido por una intensidad I_2 = 10 A. Calcular la fuerza ejercida sobre cada lado del cuadro por el campo magnético creado por el conductor.

Datos: a = 20 cm. b = 10 cm. c = 10 cm.

****

La dirección y sentido de las fuerzas ejercidas sobre los cuatro lados son los indicados en la figura.



El campo magnético creado por el conductor rectilíneo en los puntos del lado AD, será

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{c}$$

y la fuerza sobre AD es

$$F_1 = I_2 \cdot a \cdot B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2\, a}{c} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{10 \cdot 30 \cdot 20}{10}$$

$$F_1 = 12 \cdot 10^{-5}\ \text{N.}$$

por un proceso idéntico obtenemos la fuerza sobre el lado BC

$$F_2 = I_2 \cdot a \cdot B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 a}{b+c} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{10 \cdot 30 \cdot 20}{20} = 6 \cdot 10^{-5} \ \text{N}$$

El campo creado por el conductor rectilíneo en un punto cualquiera del lado AB del cuadro, es

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{x}$$

la fuerza sobre un elemento dx de dicho lado

$$dF = I_2 \cdot B \cdot dx = \frac{\mu_0}{2\pi} \ I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{dx}{x}$$

luego

$$F_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ I_1 \cdot I_2 \int_c^{c+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0}{2} \ I_1 \cdot I_2 \cdot \ln \frac{c+b}{c} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \ 300 \ln \frac{20}{10} = $$
$$= 4,14 \cdot 10^{-5} \ \text{N}.$$

análogamente

$$F_4 = 4,14 \cdot 10^{-5} \ \text{N}.$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XV-9. El cuadro rectangular de la figura adjunta puede girar aredeedor del eje Z y transporta una corriente de 10 amperios en el sentido indicado.

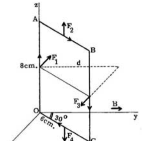
1° Si el cuadro de encuentra en un campo magnético uniforme de o,2 teslas paralelo al eje Y, calcular la fuerza ejercida sobre cada lado del cuadro en dinas, y el momento en dinas-centímetro necesario para mantener el cuadro en la posición indicada.

2°) La misma cuestión cuando el campo es paralelo al eje X.

3°) Qué momento sería necesario si el cuadro pudiese girar alrededor de un eje que pasase por su centro, paralelamente al eje Z?

****

La fuerza sobre el lado OA de la espira lleva la dirección y sentido de las x negativas.



$$F_1 = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ = 10 \cdot 8.10^{-2} . 2.10^{-1} =$$
$$= 0,16 \ \text{Nw} = 16000 \ \text{dinas}$$

La fuerza sobre BC es de sentido contrario a F_1 y su valor es el mismo .

Los módulos de las fuerzas F_2 y F_4 son:

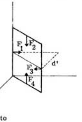
$$F_2 = F_4 = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen } 30 =$$
$$= 10 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= 0,06 \ \text{Nw} = 6000 \ \text{dinas}$$

y sus direcciones y sentidos los indicados en la figura.

El momento del par formado por F_1 y F_3 es

$$M = F \cdot d = 16.000 \cdot 6 \cdot \cos 30^o = 83.136 \quad \text{dinas-cm.}$$

2º) Cuando el campo es paralelo al eje X las fuerzas sobre los lados del cuadro llevan las direcciones y sentidos indicados en la figura.



Sus valores son

$$F_1 = F_3 = 10 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 0,16 \text{ Nw} = 16000 \text{ dinas}$$

y

$$F_2 = F_4 = 10 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,104 \text{ Nw} = 10400 \text{ dinas}$$

y el momento

$$M' = F \cdot d' = 16000 \cdot 6 \text{ sen } 30^o = 48.000 \quad \text{dinas-cm.}$$

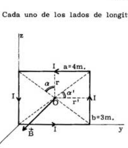
3º) El mismo que el calculado en cada uno de los dos casos anteriores.

=.=.=.=.=.=.=.=

XV-10. Calcular el campo magnético B en el centro de un circuito rectangular cuyos lados miden 3 y 4 m. por el que circula una corriente de 3 A en el sentido de las agujas del reloj. Hágase un esquema del circuito e indíquese la dirección y sentido de $\vec{B}$ y de la corriente.

****

Cada uno de los lados de longitud, a, crean un campo que valdrá



$$B_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos\varphi \, d(r\,tg\varphi)}{\frac{r}{\cos\varphi}} = \frac{\mu_o I \text{sen}\alpha}{2\pi r}$$

siendo $\quad r = \frac{b}{2} = 1,5 \text{ m.}$

y $\quad \text{sen}\,\alpha = \frac{a/2}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = 0,8$

sustituyendo valores

$$B_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 0'8}{2\pi \cdot 1,5} = 32 \cdot 10^{-8} \text{ tesla}$$

analogamente el campo magnético, B_2, creado por cada uno de los conductores de longitud, b, valdrá

$$B_2 = \frac{\mu_o I \operatorname{sen}\alpha'}{2\pi r'}$$

siendo $r' = \frac{a}{2} = 2$ m. y $\operatorname{sen}\alpha' = \frac{b/2}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5} = 0,6$

de donde $B_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 0'6}{4\pi} = 18 \cdot 10^{-8}$ tesla

el campo magnético, B, resultante en el centro del rectángulo, será

$$B = 2B_1 + 2B_2 = (64 + 36) \cdot 10^{-8} = \underline{10^{-6} \text{ tesla}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

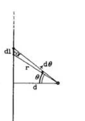
XV-11. Calcular el campo magnético, B, producido por un conductor rectilíneo indefinido, que transporta una corriente estacionaria de 1,5 A., a una distancia de 0,5 m. del mismo. ¿Cuánto vale el campo eléctrico en dicho punto? Si un electrón se mueve, con una velocidad constante de $5 \cdot 10^4$ m/seg., paralelamente al conductor y a una distancia de 0,1 m.del mismo ¿qué fuerza ejerce el campo magnético creado por el conductor sobre el electrón? Carga del eletron = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Cul.

****

El campo creado por un conductor de longitud, dl, por el que circula una corriente de intensidad, I, en un punto situado a una distancia r, vale:

$$dB = K' \frac{I\ dl\ \operatorname{sen}\alpha}{r^2}$$

descomponemos el conductor rectilíneo indefinido en elementos de longitud dl, el campo magnético, B, resultante en el punto P, será



$$B = \int dB = K'I \int \frac{dl \cdot \operatorname{sen}\alpha}{r^2}$$

aplicando el teorema de los senos tendremos:

$$\frac{r}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{dl}{d\theta} \quad \text{o sea} \quad dl\ \operatorname{sen}\alpha = r \cdot d\theta$$

además $r = \frac{d}{\cos\theta}$

de donde

$$B = \frac{K'I}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot d\theta = \frac{K'I}{d} \Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2K'I}{d} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I}{d}$$

Sustituyendo valores numéricos, tendremos

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\ \frac{1,5}{0,5} = \underline{6\cdot 10^{-7}\ \text{tesla}}$$

La fuerza, sobre el electrón, debida al campo magnético, será

$$F = q\cdot v\cdot B = q\cdot v\cdot \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{I}{d'} = 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{4}\ \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\cdot\frac{1,5}{0,1} = \underline{24\cdot 10^{-21}\,\text{Nw.}}$$

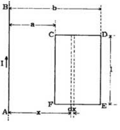
=.=.=.=.=.=.=.=

XV-12. El conductor rectilíneo largo AB transporta una corriente de intensidad I. ¿Cuál es el flujo que atraviesa el área rectangular CDEF?

Datos: I = 10 A, l = 10 cm, a = 5 cm, b = 10 cm.

****

El conductor AB crea un campo magnético en los puntos situados a una distancia x, cuyo valor es



$$B = \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{I}{x}$$

perpendicular al papel y hacia adentro.

El flujo elemental a través de una banda de longitud l y anchura dx, es

$$d\Phi = B\cdot ds = \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot I\cdot l\cdot\frac{dx}{x}$$

El flujo a través de CDEF, será

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot I\cdot l\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot I\cdot l\cdot \ln\frac{b}{a}$$

sustituyendo valores

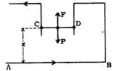
$$\Phi = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\ 10\cdot 10^{-1}\cdot \ln\frac{10}{5} = 1,38\cdot 10^{-7}\quad \text{weber}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

XV-13. Un largo conductor horizontal AB pemanece en reposo sobre la superficie de una mesa. Otro conductor CD, situado directamente encima del primero, tiene l = 100 cm. de longitud y puede deslizar hacia arriba y hacia abajo por medio de dos guías metálicas C y D. Los dos conductores están conectados por contactos deslizantes y por ellos circula una intensidad de corriente de 100 A. La densidad lineal del alambre es de 10^{-2} Kg/m. ¿A qué altura sobre la mesa se encontrará en equilibrio el conductor CD? Tomar $g = 10\ m\cdot s^{-2}$

****

En la región que está situado el conductor CD existe un campo electromagnético creado por la corriente que circula por el conductor AB. El campo es perpendicular al dibujo y dirigido hacia el lector y vale



$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot I^2 \cdot \frac{1}{x}$$

este campo ejercerá una fuerza magnética sobre el conductor CD dada por la expresión

$$F = I \cdot l \cdot B = \frac{\mu_o}{2\pi} I^2 \frac{1}{x}$$

el conductor CD estará en reposo cuando $F = P$

de donde

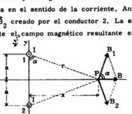
$$x = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot I^2 \cdot \frac{1}{mg} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \; 10^4 \; \frac{1}{10^{-2} \cdot 10} = 2 \cdot 10^{-2} = 2 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XV-14. La figura muestra dos secciones frontales de sendos conductores paralelos, muy largos y perpendiculares al plano de la misma. Cada uno de ellos transporta una corriente I, pero en sentidos contrarios. 1º) Dibujar, mediante vectores, la dirección y sentido del campo magnético creado por cada uno de los conductores, así como el campo magnético resultante en el punto P. 2º) Hallar la expresión del módulo de B para cualquier punto del eje OX, en función de la coordenada x. 3º) Construir una gráfica que represente B en función de x. 4º) ¿Para qué valor de x B es máximo? 5º) Repetir el estudio para los puntos del eje OY.

****

1º) El campo $\vec{B}_1$ creado por el conductor 1 es perpendicular al plano determinado por el conductor y el segmento r, el sentido nos lo daría el giro de un tornillo que avanza en el sentido de la corriente. Analogamente hemos representado el campo $\vec{B}_2$ creado por el conductor 2. La suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ nos da gráficamente el campo magnético resultante en el punto P.



2º) Los módulos de los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ son iguales y viene dados por la expresión

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{I}{r} = \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{I}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

la densidad de flujo magnético en P será

$$B = 2B_1\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{I}{(a^2+x^2)^{1/2}}\cdot\frac{a}{(a^2+x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_o}{2\pi}\cdot\frac{I\,a}{a^2+x^2}$$

3º y 4º) La curva representativa de B en función de x es simétrica respecto al eje vertical, solamente toma valores positivos y tiene por asintota al eje OX

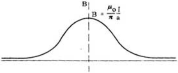
Derivando B respecto a x, obtenemos

$$B' = -\frac{\mu_o}{\pi}\cdot I a\cdot\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}$$

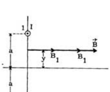
luego B será máximo en el punto $x = 0$

$$B\,max = \frac{\mu_o}{\pi}\cdot\frac{I}{a}$$

la curva será



5º) La representación vectorial del campo resultante en un punto del eje Y, será

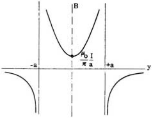


El módulo del campo resultante será

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_o}{2\pi}\,\frac{I}{a-y} + \frac{\mu_o}{2\pi}\,\frac{I}{a+y} = \frac{\mu_o}{2\pi}\,\frac{I\,a}{a^2-y^2}$$

B tendrá valor máximo para $y = \pm a$

y la curva será



=.=.=.=.=.=.=

XV-15. Un ciclotrón está constituido por dos electrodos huecos D_1 y D_2 en forma de semicilindros, colocados en un campo de inducción B = 0,3 tesla uniforme y paralelo a las generatrices de los electrodos. Entre una diferencia de potencial sinusoidal que se invierte con una frecuencia tal que un protón que abandona un electrodo encuentra siempre entre los dos electrodos un campo eléctrico que le comunica una aceleración.

a) Encontrar la frecuencia f del campo acelerador. Datos: Masa del protón m = $1'66\cdot10^{-27}$ Kg. carga del protón q = $1,6\cdot10^{-19}$ cul. Se despreciará la duración del paso de un electrodo a otro.

b) El radio de la última trayectoria descrita por los protones, antes de chocar con un blanco L, es R = 70 cm. Determinar la velocidad v y la energía cinética en el momento del choque.

c) Diferencia de potencial necesaria para dotar a un protón que parte del reposo con la misma velocidad. d) Calcular el número de vueltas dadas por un protón antes del choque, suponiendo que es emitido en el eje del aparato en un instante en que la diferencia de potencial entre los electrodos alcanza su valor maximo V_m = 30000 voltios. Determinar la duración del recorrido.

****

a) Puesto que la orbita descrita por el protón es perpendicular al campo magnético B, describe una trayectoria circular cuyo radio será $r = \frac{mv}{qB}$ el tiempo para recorrer la circunferencia es $T = \frac{2\pi r}{v}$

por tanto $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1,6\cdot 0,2}{2\pi\cdot 1'66}10^8 = 4,6\cdot10^6$ hertz.

También vale como solución todo multiplo impar de la solución hallada.

b) En el caso de que $R = 70$ cm. la velocidad lineal alcanzada en esta trayectoria será

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{1,6 \cdot 0,3 \cdot 0,70}{1'66} 10^{8} = 20,24 \cdot 10^{6} \text{ m/s}$$

La energía cinética en el momento del choque es

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 1'66 \cdot 10^{-27} \cdot 20,24^2 \cdot 10^{12} = 3'4 \cdot 10^{-13} \text{ julios}$$

c) La diferencia ha de ser tal que $E_c = qV$

luego $$V = \frac{Ec}{q} = \frac{3,4 \cdot 10^{-13}}{1'6 \cdot 10^{-19}} = 2,1 \cdot 10^{6} \text{ voltios}$$

d) Como cada vez que pase por el intervalo entre los electrodos la energía del protón aumenta en 30.000 eV = 30 KeV, y la energía que que llega a adquirir es de 2100 KeV, tendrá que dar un número de vueltas N tal que se verifique

$$2N = \frac{2100}{30} = 70 \qquad \text{o sea} \qquad N = 35 \text{ vueltas}$$

La duración de una vuelta es

$$t = \frac{N}{f} = \frac{35}{4'6 \cdot 10^{6}} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ seg.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XVI

CORRIENTES INDUCIDAS

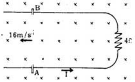
XVI-1. La barra conductora AB de la figura, de 25 cm. de longitud se mueve constantemente paralela a sí misma, apoyándose sin rozamiento sobre unos carriles conductores. El conjunto está sumergido en un campo de inducción magnética de 1 wb/m^2, perpendicular al plano de la figura y que penetra en el mismo.

a) Calcular el valor de la f.e.m. inducida en el circuito.

b) Si la única resistencia del circuito es la indicada, ¿ cuál es el valor y el sentido de la corriente que recorre el circuito ?

c) ¿ qué fuerzas actuarán sobre la barra móvil para mantener constante su velocidad ?

d) Calcular la potencia disipada en forma de calor en la resistencia



****

a) La f.e. m. inducida en la barra conductora A B es:

$$\varepsilon = Blv = 1 \cdot 25 \cdot 10^{-2} \cdot 16 = 4 \text{ voltios}$$

siendo A el punto de mayor potencial

b) La intensidad de la corriente inducida en el circuito es

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4}{4} = 1 \text{ A.}$$

y su sentido contrario al de las agujas del reloj

c) Al circular por la barra AB una corriente en el sentido BA, el campo magnético creará una fuerza electromagnética de sentido contrario al movimiento y de valor

$$F = IlB = 1 \cdot 25 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 0'25 \text{ N.}$$

y deberemos aplicar una fuerza igual y de sentido contrario para que la barra siga moviéndose con movimiento uniforme.

d) La potencia disipada es

$$P = I^2R = 1 \cdot 4 = 4 \text{ watios}$$

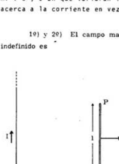
=.=.=.=.=.=.=

XVI-2. Un alambre rectilíneo indefinido es recorrido por una corriente de 50A. Manteniéndose constantemente paralelo al mismo y alejándose de él, otro alambre de 40 cm. de longitud, se mueve con una velocidad constante de 30 m/seg. Calcular el vector inducción que la corriente crea sobre el segundo alambre cuando la distancia entre ambos es: 1º) 5 cm; 2º) 25 cm. 3º) En cada una de estas situaciones determinar la f.e.m. inducida en el alambre de 40 cm. 4º) ¿ Cúal es el sentido de dicha f.e. m. ? 5º) ¿ En que variarán los anteriores resultados si el alambre se acerca a la corriente en vez de alejarse de ella ?

****

1º) y 2º) El campo magnético creado por el conductor rectilíneo indefinido es

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$$



para $d = 5$ cm.: $B_1 = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\dfrac{50}{5 \cdot 10^{-2}} =$

$= 2 \cdot 10^{-4}$ tesla

para $d = 25$ cm.: $B_2 = \dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\dfrac{50}{25 \cdot 10^{-2}} =$

$= 4 \cdot 10^{-5}$ tesla

3º) La f. e. m. inducida en el alambre viene dada por la expresión: $\varepsilon = Blv$

para d = 5 cm.

$$_1 = 2.10^{-4}.40.10^{-2}.30 = 24.10^{-4} \text{ voltios}$$

para d = 25 cm.

$$_2 = 4.10^{-5}.40.10^{-2}.30 = 48.10^{-5} \text{ voltios}$$

4º) Al ser tanto B_1 como B_2 perpendiculares al dibujo y hacia adentro, las cargas positivas del alambre en movimiento se acumularán en el extremo y las negativas en N, el sentido de la f. e. m. inducida, en ambos casos, es de N a P.

5º) Solamente cambiará el sentido de la f.e.m. inducida que llevaría varía el sentido contrario al indicado en el punto anterior.

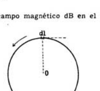
=.=.=.=.=.=.=

XVI-3. Se considera un marco circular de radio R = 5 cm. con N=100 espiras, formadas por un hilo de cobre de diametro o'5 mm. y resistividad ρ = 1'6 10^{-8} Ω m. :a) Calcular el campo magnético B producido en el centro del arrollamiento cuando este es recorrido por una corriente de 10^{-2} A. Precisar el sentido y dirección del vector B definidos por el sentido de la corriente elegido. b) Calcular la resistencia del arrollamiento. c) Suponiendo que la indución magnética tiene en todos los puntos del plano del marco el mismo valor que en el centro, calcular su coeficiente de autoinducción. d) El marco gira alrededor de uno de sus diametros a la velocidad de 50 vueltas por segundo en un campo magnético uniforme de intensidad B_o= 0'1 weber/m^2 y de dirección perpendicular al eje de giro, calcular la f.e.m. inducida.

****

a) Cada elemento dl de las espiras crea un campo magnético dB en el centro de la espira

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\ dl}{R^2}$$



Perpendicular al papel y dirigido al lector.

El campo resultante en el centro 0 será:

$$B_1 = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2} \cdot \int_o^{2\pi R} dl = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{I}{R}$$

El campo magnetico B creado en 0 por las N espiras que forman el cuadro será;

$$B = N\frac{\mu_o}{2}\cdot\frac{I}{R} = 10^2\frac{4\pi\cdot10^{-7}}{2}\quad\frac{10^{-2}}{5\cdot10^{-2}} = 4\pi\cdot10^{-6}\ \text{wb/m}^2$$

b) La resistencia del arrollamiento es:

$$R=\rho\frac{l}{S} = \rho\frac{N\cdot2\cdot\pi\cdot R}{\pi\cdot a^2/4} = 1'6\cdot10^{-8}\ \frac{10^2\cdot\ 8\cdot5\cdot10^{-2}}{25\cdot10^{-8}} = 2'56\ \Omega$$

c) La autoinducción de un circuito viene dada por la expresión: $L = \frac{N\Phi}{I}$, luego,

$$L = \frac{N\cdot BS}{I} = \frac{N\cdot B\cdot\pi\cdot R^2}{I} = \frac{10^2\cdot 4\pi\cdot10^{-6}\cdot\pi\cdot25\cdot10^{-4}}{10^{-2}} = 3'14\cdot10^{-4}\text{henrios}$$

d) Cuando la normal al marco forme un angulo α con la dirección de B, el flujo que atraviesa el cuadro es : $\Phi = N\ S\ B\cos\alpha$

La f.e.m. inducida será:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = N\ S\ B\ \text{sen}\,\alpha\ \frac{d\alpha}{dt} = N\ S\ B\,\omega\,\text{sen}\,\alpha$$

o sea

$$\varepsilon = 100\cdot\pi\cdot25\cdot10^{-4}\cdot10^{-1}\cdot2\pi\cdot50\cdot\text{sen}\,\alpha = 2'5\cdot\pi^2\cdot\text{sen}\,\alpha\ \text{teslas}$$

La f.e.m. inducida será máxima cuando el plano del cuadro sea paralelo a B

$$\varepsilon_{max} = 2'5\ \pi^2\ \text{teslas}$$

y $\varepsilon = 0$ cuando B sea perpendicular al plano del cuadro

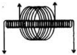
=.=.=.=.=.=.=

XVI-4. Un largo solenoide de n = 500 vueltas/m y sección S = 5 cm.^{2} se encuentra en el interior de una pequeña bobina de N = 30 espiras. Calcular el coeficiente de indución mutua de ambos circuitos. ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida en la bobina cuando la corriente que circula por el solenoide varía de 5A. a 1A. en 0'1 seg.?

****

El campo creado en el interior del solenoide por una corriente I que circula por él, será

$$B = \mu_o\frac{NI}{l} = \mu_o n\ I$$



A través de la sección central del solenoide el flujo viene dado por:

$$\Phi = BS = \mu_o n\ I\ S$$

Como este flujo atraviesa cada una de las espiras de la bobina, tendremos

$$N\,\Phi = M\,I \Rightarrow M = \frac{N\,\Phi}{I} = \frac{N\mu\;n\,I\,S}{I} = \mu\;n\,N\,S$$

y sustituyendo valores

$$M = 4\pi\;10^{-7}\;5\;10^{-2}\;3\;10\;5\;10^{-4} = 3\pi\;10^{-6}\;\text{henrios} = 3\pi\mu\,\text{henrios}$$

La fuerza electromotriz inducida en la bobina, será

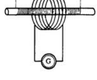
$$E = -M\,\frac{dI}{dt} = -3\pi\,\frac{(1-5)}{0,1} = 120\,\pi\,\mu\,V$$

=.=.=.=.=.=.=

XVI-5. Un selenoide de 50 cm. de longitud y 5 cm. de diametro tiene un arrollamiento de N = 1000 espiras. Una bobina formada por N'=10 espiras muy apretadas, de hilo aislado, rodea la sección recta central del solenoide. Los terminales de la bobina se conectan a un galvanómetro, y la resistencia total de bobina, galvanometro y conductores es 25 Ω . Calculese la intensidad que pasa por el galvanómetro cuando la intensidad en el solenoide disminuye linealmente de 3 a 1A. en 0'5 seg.

****

Consideraremos que el solenoide es largo en comparación con su diámetro y, en este caso, el campo magnético en los puntos próximos al centro, es



$$B = \mu_o\,\frac{N\,I}{l}$$

El flujo que atraviesa la bobina es

$$\Phi = N'\,B\,S = N'\mu_o\frac{N\,I}{l}\,\pi\,r^2$$

La intensidad es función lineal del tiempo:

$$I = I_o - kt$$

para los valores del problema $\quad 1 = 3 - 0,5\,k \;\Rightarrow\; k = 4$

luego $\quad I = 3 - 4\,t$

La f.e.m inducida en la bobina será

$$E = -\frac{d\Phi}{d\,t} = -\frac{\mu_o N\,N'\,\pi\,r^2}{l}\,\frac{d\,I}{d\,t} = \frac{4\mu_o N\,N'\,\pi\,r^2}{l}$$

y la intensidad

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{4\mu_o N\,N'\,\pi r^2}{l\,R} = \frac{16\,\pi^2 N\,N'\,r^2}{l\,R}\;10^{-7}$$

sustituyendo valores

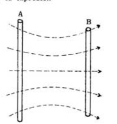
$$i = \frac{16\,\pi^2\,10^3\;10\;6,25\;10^{-4}}{5\;10^{-1}\;25}\;10^{-7} = 8\,\pi^2\,10^{-7}\;A$$

XVI-6. Dos bobinas A y B de 400 y 900 espiras respectivamente. Una corriente de 3A. circulando por la bobina A crea un flujo de 2 10^{-4} Wb. en cada una de las espiras de la bobina B. Se pide: 1°) Calcular el coeficiente de indución mutua de ambas bobinas. 2°) La fuerza electromotriz inducida en la bobina B cuando la corriente que circula por A varíe de 2A. a 1A. en un tiempo de 0'1 seg. 3°) Flujo a través de la bobina A cuando por la B circula una corriente de 2A.

****

1º) El flujo a través de la bobina B viene dado por la expresión

$$\Phi_2 = M \cdot I_1$$



de donde

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{900 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{3} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ henrios}$$

2º) Conocido M, la fuerza electromotriz inducida en la bobina B, será

$$E_2 = -M \cdot \frac{d I_1}{d t} = -6 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{(1-2)}{0,1} = 0,6 \text{ voltios}$$

3º) El flujo a través de la bobina A, será

$$\Phi_1 = M \cdot I_2 = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 2 = 12 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

=.=.=.=.=.=.=

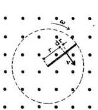
XVI-7. Una varilla metálica de longitud L, gira en un plano horizontal alrededor de uno de sus extremos que se mantiene fijo, con velocidad angular constante ω. La varilla esta en una región del espacio en que existe un campo magnético vertical uniforme de indución B Calcular: a) La fuerza magnética sobre un electrón situado a una distancia r del extremo fijo. b) Campo eléctrico inducido a lo largo de la varilla. c) Diferencia de potencial entre los extremos de esta.

Aplicar a: L= 20 cm. B= 0'1 tesla ω = 10 rad/seg.

****

a) La fuerza que actua sobre una carga, en movimiento, en el seno de un campo electromagnético, viene dada por la expresión:

$$F = q\, v\, B \operatorname{sen}\alpha$$



siendo $v = \omega r$ y $\operatorname{sen}\alpha = 1$

luego

$$F = e \omega B\, r = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10\pi \cdot 0,1 r$$

$$F = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \pi \cdot r \cdot \text{Nw}$$

b) El campo eléctrico inducido será

$$E = \frac{F}{q} = \frac{q\ B\ v}{q} = Bv = B\omega r = 0,1\ 10\pi\ r = \pi r \quad \text{voltios/metro}$$

c) La diferencia de potencial en los extremos de un elemento de varilla, de longitud dr, será

$$dV = E\ dr = B\ \omega\ r\ dr$$

sumando las diferencias de potencial en todos los elementos de la varilla, tendremos

$$V = \int dV = B\omega\int_0^L r\ dr = \frac{B\omega L^2}{2} = \frac{0,1\cdot 10\pi\cdot 4\cdot 10^{-2}}{2} = 2\pi\cdot 10^{-2} \text{ voltios}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVI-8. Una bobina de 200 espiras y radio r = 0'10 metros se coloca perpendicularmente a un campo magnético uniforme de B = 0'2 tesla. Hallar la fuerza electromotriz inducida en la bobina si, en 0'1 seg.: 1°) Se duplica el campo magnético. 2°) Si el campo se anula. 3°) Si se invierte el sentido del campo. 4°) si se gira la bobina 90° en torno al eje paralelo al campo. 5°) Si se gira la bobina 90° en torno al eje perpendicular al campo.

****

1º) El flujo que atraviesa la bobina en la posición inicial es

$$\Phi_1 = N\ B\ S = 200\cdot 0,2\cdot\pi\cdot 10^{-2} = 4\pi\cdot 10^{-1} \text{ weber}$$

si se duplica B, el flujo será

$$\Phi_2 = 200\cdot 0,4\cdot\pi\cdot 10^{-2} = 8\pi\cdot 10^{-1} \text{ weber}$$

La f.e.m. inducida será

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{8\pi\cdot 10^{-1} - 4\pi\cdot 10^{-1}}{0,1} = -4\pi \text{ voltios}$$

2º) En este caso $\Phi_2 = 0$, luego

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{0 - 4\pi\cdot 10^{-1}}{0,1} = 4\pi \text{ voltios}$$

3º) Si se invierte el sentido del campo

$$\Phi_2 = -4\pi\cdot 10^{-1}$$

luego

$$\varepsilon = -\frac{-4\pi\cdot 10^{-1} - 4\pi\cdot 10^{-1}}{0,1} = 8\pi \text{ voltios}$$

4º) En este caso $\Phi_2 = \Phi_1 \Rightarrow \varepsilon = 0$

5º) Al girar 90° en torno al eje perpendicular al campo $\Phi_2 = 0$

luego

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 4\pi \text{ voltios}$$

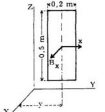
XVI-9. Un conductor rectangular se desplaza paralelamente al plano ZY. Calcular la intensidad que circula por el circuito, si tiene una resistencia de 2Ω, en los casos siguientes:

a) Se desplaza con velocidad uniforme v = 2 m/seg.

b) Al cabo de 100 seg., si la aceleración es 2 m/seg^2, partiendo del reposo. El campo magnético es: $B_x = (6 - y)$ Wb/m^2, $B_y = 0$, $B_z = 0$

Nota.- Inicialmente el lado izquierdo del conductor coincide con el eje OZ.

****



a) El flujo a través de la superficie encerrada dentro del conductor, es:

$$\Phi = \int \vec{B}\, d\vec{s} = \int_y^{y+0,2} (6-y)0,5\, dy = 0,5\left[6y - \frac{y^2}{2}\right]_y^{y+0,2} =$$

$$= 0,59 - 0,1y$$

pero $y = vt = 2t$

luego $\Phi = 0,59 - 0,2t$

La fuerza electromotriz inducida en el circuito será :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0,2 \text{ voltios}$$

La corriente inducida en el circuito será :

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ A.}$$

b) En este caso: $y = \frac{1}{2} a\, t^2 = t^2$

y el flujo quedará : $\Phi = 0,59 - 0,1\, t^2$

La fuerza electromotriz inducida será

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0,2\, t = 0,2\; 100 = 20 \text{ voltios}$$

y la intensidad $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{20}{2} = 10$ A.

=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XVII

CORRIENTE ALTERNA

XVII-1. Un circuito consta de una resistencia de 40Ω en serie con un condensador de 10μ F. Se aplica en los bornes de éste circuito una diferencia de potencial alterna de V = 110 voltios y f = 60 ciclos. Calcular:

1º) La impedancia del condensador y la impedancia total del circuito.

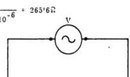
2º) La intensidad en el circuito.

3º) Diferencia de fase entre la corriente y la diferencia de potencial en bornes del circuito.

****

1º) La impedancia del condensador o reactancia capacitiva, es

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6,28 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 265'6\,\Omega$$



La impedancia del circuito

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{1600 + 265'6^2} = 268'7\,\Omega$$

2º) La intensidad eficaz

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{110}{268'7} = 0,41 \quad A.$$

3º) El ángulo de desfase viene dado por la expresión

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-X_c}{R} = -\frac{265'6}{40} = -6,64 \qquad \text{luego} \qquad \varphi = -81^{\circ}30'$$

la intensidad está avanzada $81^{\circ}30'$ con respecto a la d.d.p. en bornes

=.=.=.=.=.=.=

XVII-2. Un circuito en serie que está formado por una resistencia de 1000 ', una autoinducción de 0'5 henrios y una capacidad de $0'2\cdot10^{-6}$ faradios, se conecta a una línea de 360 voltios de tensión y 5000 rad/s de frecuencia angular. Calcular:

a) La impedancia del circuito para dicha frecuencia y la intensidad de la corriente que por él circula.

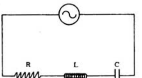
b) La diferencia de fase entre la corriente y la tensión suministrada.

c) Con ayuda de los resultados obtenidos, dibujar el diagrama vectorial del circuito.

****

a) La reactancia inductiva vale: $X_L = \omega L = 5000\cdot 0,5 = 2500\Omega$

" " capacitiva " : $X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{0,2\cdot10^{-6}\cdot 5\cdot10^{3}} = 1000\Omega$



La impedancia del circuito es:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} =$$

$$= \sqrt{10^6 + (2500-1000)^2} = \underline{1.800\,\Omega}$$

La intensidad pedida será:

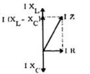
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{360}{1800} = \underline{0,2\ A}$$

b) El ángulo de desfase entre la intensidad de corriente y el voltaje, será:

$$\varphi = \text{arc tg}\ \frac{X_L - X_C}{R} = \text{arc tg}\ \frac{2500-1000}{1000} = \text{arc tg}\ 1,5$$

luego $\varphi = 56°18'36''$

c) El diagrama vectorial correspondiente al circuito, será



=.=.=.=.=.=.=

XVII-3. Un circuito está formado por un generador de corriente alterna, una resistencia R, una capacidad C y una autoinducción de L = 0'01 Henrios todos dispuestos en serie. Los valores instantáneos de la tensión, en voltios y de la intensidad, en amperios, cuando t está en segundos son respectivamente:

$$v = 250\sqrt{2}\cos(3000t - 10°)$$
$$i = 12'5\cos(3000t - 55°)$$

Calcular los valores de R y de C.

****

El ángulo de desfase, φ, entre intensidad y voltaje vale $\varphi = 55 - 10 = 45°$

luego $\quad tg\,\varphi = \dfrac{X_L - X_C}{R} = 1 \quad$ de donde $\quad X_L - X_C = R$

además

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{250\sqrt{2}}{12'5} = 20\sqrt{2}$$

o sea $\quad \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{2R^2} = 20\sqrt{2} \quad$ de donde $\quad \underline{R = 20\Omega}$

sabemos que $\quad X_L = \omega L = 3000 \cdot 0,01 = 30\Omega$

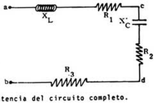
por tanto $\quad X_C = X_L - R = 30 - 20 = 10\Omega$

como $\quad X_C = \dfrac{1}{\omega C} \quad$ nos quedará $\quad C = \dfrac{1}{\omega X_C} = \dfrac{1}{3 \cdot 10^4} = \underline{\dfrac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ faradios}}$

=.=.=.=.=.=.=

XVII-4. Los puntos a y b de la figura son las terminales de una línea recorrida por una corriente alterna senoidal de frecuencia f = 60 ciclos/seg. La tensión eficaz entre dichos puntos vale V = 130 voltios.

a) Cual es la expresión de la tensión instantánea, V, entre a y b.
b) Cuanto vale la intensidad eficaz I en el circuito acdb.
c) Calcular la diferencia de potencial, V_1, entre los puntos a y c.
d) Calcular la diferencia de potencial, V_2, entre los puntos c y d.



e) Deducir el valor del factor de potencia del circuito completo.

Datos: $X_L = 8$, $X_C = 3$, $R_1 = 6$, $R_2 = R_3 = 3$.

a) La diferencia de potencial instantánea es: $v = V_m \operatorname{sen} 2\pi ft$

pero $V_m = \sqrt{2}\,V = 183{,}3 \operatorname{sen} 120\pi t$

sustituyendo nos quedará $\boxed{v = 183{,}3 \operatorname{sen} 120\pi t}$

b) La impedancia del circuito es:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \underline{13\,\Omega}$$

y la intensidad eficaz

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{130}{13} = \underline{10\ A}.$$

c) La impedancia entre a y c vale:

$$Z_{ab} = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10\,\Omega$$

luego $\quad v_1 = I\,Z_{ab} = 10 \cdot 10 = \underline{\underline{100 \text{ voltios}}}$

d) Analogamente

$$Z_{cd} = \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,\Omega$$

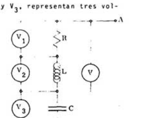
y $\quad v_2 = I\,Z_{cd} = 10 \cdot 3\sqrt{2} = \underline{\underline{42{,}3 \text{ voltios}}}$

e) El factor de potencia es $\cos\varphi$ siendo $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{X_L - X_C}{R}$

por tanto $\quad \cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{12}{13}$

=, =, =, =, =, =, =, =

XVII-5. En el circuito de la figura V_1, V_2 y V_3, representan tres voltímetros, los cuales al aplicar una cierta tensión entre los puntos A y B marcan respectivamente 40 voltios, 20 voltios y 10 voltios. La bobina que aparece en el circuito presenta un coeficiente de autoinducción de 0'1 Henrios. ¿Cuánto marcaría un voltímetro, V, colocado entre los puntos A y B ?. La frecuencia de la tensión aplicada es de 50 hertz.



****

La diferencia de potencial en los extremos de la bobina es:

$$V_2 = I \cdot Z_2 \Rightarrow I = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{V_2}{2\pi f L} = \frac{20}{2\pi\, 50 \cdot 0'1} = \frac{20}{10\pi} = \frac{2}{\pi}\ A$$

La tensión en el condensador es:

$$V_3 = I \cdot Z_3 \Rightarrow Z_3 = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{V_3}{I} = \frac{10}{2/\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\pi f \cdot C} = 5\pi \Omega$$

del mismo modo

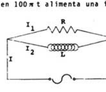
$$V_1 = I \cdot Z_1 \Rightarrow Z_1 = R = \frac{V_1}{I} = \frac{40}{2/\pi} = 20\pi \Omega$$

El voltímetro colocado entre A y B marcaría

$$V = I \cdot Z = I\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{400\pi^2 + (10\pi - 5\pi)^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{425\pi^2} = 41'23 \text{ vol.}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XVII-6. Una tensión alterna $V = 19'15\sqrt{2}$ sen $100\pi t$ alimenta una inductancia de 1/10 henrios sin resistencia y una resistencia de 24'5 montadas en paralelo. Determinar la intensidad total que recorre el circuito y las corrientes parciales que atraviesan cada una de las ramas. Hallar, además, el desfase entre la intensidad y la tensión.



****

La impedancia equivalente es: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{j\,L\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + j\,L\omega}{j\,L\omega R}$

o sea $$Z = \frac{j\,L\omega R}{R + j\,L\omega} = \frac{\frac{1}{10}100\pi\; 24'5}{24'5 + \frac{1}{10}\;100\pi\, j}\; j = \frac{245\,\pi j}{24'5 + 10\pi j}$$

La tensión eficaz es: $$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{19'15\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 19'15 \text{ voltios}$$

por tanto, la intensidad eficaz será

$$I = \frac{V}{Z} = 19'15\,\frac{24'5 + 10\pi j}{245\pi j} = 19'15\,\frac{10\pi - 24'5\,j}{245\pi} = 0'78 - 0'61\,j$$

y el módulo de la intensidad $I = \sqrt{(0'78)^2 + (0'61)^2} \simeq 1$ Amperios

La corriente eficaz que atraviesa R es: $I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{19'15}{24'5} = 0'78$ A

La corriente eficaz que atraviesa, L , es:

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{J\,L\omega} = -\frac{V}{L\omega}j = -\frac{19'15}{10\pi}j = -0,61\,j$$

y su módulo $I_2 = 0,61$ Amperios

El desfase entre la intensidad y el voltaje, será

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{0'61}{0'78} = -0'78 \Rightarrow \varphi = -38^{o}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVII-7. Se fabrica un solenoide de espiras muy próximas las unas a las otras, con 16 m, de un hilo de cobre, la separación entre dos espiras es de 2 mm. Calcular:

1º) Las dimensiones de este solenoide de forma que constituya junto con un condensador de $10^{-2}\mu$ f, un circuito resonante a 100.000 ciclos/seg. Se desprecia el espesor del aislante que recubre el hilo de cobre.

2º) Admitiendo que la resistencia de la bobina sea la misma que en régimen contínuo, calcular la impedancia del circuito resonante. Resistividad del cobre = $1'77\mu\,\Omega$cm. Radio de la sección del hilo de cobre 0'1 mm. Tómese $\pi^2 = 10$

****

1ª)Determinaremos el valor de la autoinducción en resonancia con el condensador dado. Se verifica:

$$X_L = X_C$$

o sea

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega^2} = \frac{1}{10^{-8}\cdot 4\pi^2\cdot 10^{10}} = 0'25\cdot 10^{-3} \text{ henrios}$$

Por otra parte, la autoinducción vale:

$$L = \frac{N}{I}\Phi = \frac{N}{I}B\cdot S = \frac{N}{I}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\frac{N}{L}\cdot I\cdot S = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\frac{N^2\cdot S}{l}$$

Si llamamos R al radio de las espiras y d a la longitud del hilo de cobre, tendremos:

$$d = 2\pi\, r\cdot N \Rightarrow r = \frac{d}{2\pi N} \qquad S = \pi r^2 = \pi\frac{d^2}{4\pi^2\cdot N^2} = \frac{d^2}{4\pi\cdot N^2}$$

luego

$$L = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot\frac{N^2}{l}\cdot\frac{d^2}{4\pi N^2} = 10^{-7}\cdot\frac{d^2}{l} = 0'25\cdot 10^{-3}$$

de donde

$$l = \frac{10^{-7}\cdot d^2}{0'25\cdot 10^{-3}} = 1024\cdot 10^{-4} \text{ m.} = 0'1024 \text{ m} = 10'24 \text{ cm.}$$

el número de espiras del solenoide será

$$N = \frac{l}{e} + 1 = \frac{10'24}{0'02} + 1 = 513 \text{ espiras}$$

y el radio de las espiras

$$r = \frac{d}{2\pi\cdot N} = \frac{16}{2\pi\cdot 513} = 0'43 \text{ cm.}$$

2º) Como el circuito está en resonancia, la impedancia del circuito es igual a la resistencia, luego:

$$Z = R = \rho\frac{l}{s} = 1'77\cdot 10^{-8}\cdot\frac{16}{\pi\cdot 10^{-8}} = 9'01\,\Omega$$

XVII-8. Un salto de agua de 500 cm. tiene un caudal de 60 m^3 por minuto. Después de haber hecho girar una turbina, el agua sale con una velocidad v = 28'3 m/s. La turbina está acoplada a un alternador con un rendimiento de 0'8. El alternador presenta entre bornes una diferencia de potencial de valor máximo Vm = 40.000 voltios alimenta un circuito de factor de potencia cos φ= 0'9. Calcular la intensidad en el circuito. $g=9'8 m/s^2$.

****

Si tomamos la masa de agua que llega cada segundo a la turbina, al calcular la diferencia de energía cinética de dicha masa cuando llega y cuando sale de la turbina, habremos obtenido la potencia suministrada por el salto de agua a la turbina, o sea:

$$P_T = \frac{1}{2} m (V^2 - v^2) = \frac{1}{2} 10^4 (2gh - v^2) = \frac{10^4}{2}(1000.\,9'8 - (28'3)^2) = 4,5.\,10^7 \text{ vatios}$$

Como el rendimiento es 0,8, la potencia del alternador será

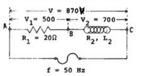
$$P_a = P_T\ 0'8 = 3'6 \cdot 10^7 \text{ vatios}$$

pero
$$P_a = V\,I \cos\varphi$$

luego
$$I = \frac{P_a}{V \cos\varphi} = \frac{P_a \cdot \sqrt{2}}{V_m \cos\varphi} = \frac{3,6.10^7\ \sqrt{2}}{40000\ 0,9} = 1414 \quad \text{amperios}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVII-9. Conocidos los datos representados en la fig, se pide calcular:



1º) Intensidad de corriente.
2º) Los valores de R_2 y L_2
3º) La potencia absorbida por R_1, por la bobina y por el circuito.
4º) El factor de potencia del circuito.

****

1º) Conocida la diferencia de potencial en los extremos de R_1, podemos calcular la intensidad eficaz.

$$I = \frac{V}{R_1} = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ A.}$$

2º) La impedancia del circuito entre los puntos B y C es:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2} = \frac{V_2}{I} \Rightarrow R_2^2 + L_2^2\omega^2 = \frac{V_2^2}{I^2} = \left(\frac{70}{2'5}\right)^2 = 28^2 = 784 \text{(a)}$$

la impedancia entre A y C es:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (L_2\omega)^2} = \frac{V}{I} \Rightarrow (R_1 + R_2)^2 + L_2^2\omega^2 = \frac{V^2}{I^2} = \left(\frac{87}{2'5}\right)^2 = 34,8^2 =$$

$= 1211'04$ (b) restando (a) de (b), obtenemos

$$(R_1 + R_2)^2 - R_2^2 = 1211,04 - 784 \Rightarrow R_1^2 + 2R_1R_2 = 427'04$$

de donde

$$R_2 = \frac{427'04 - R_1^2}{2R_1} = \frac{427,04 - 400}{40} = 0'676\,\Omega$$

despejamos L_2 de (a)

$$L_2^2 = \frac{784 - R_2^2}{2} \Rightarrow L_2 = \frac{\sqrt{784 - 0'676^2}}{314} = 0,089 \text{ henrios} = 89 \text{ mH.}$$

3º) La potencia absorbida por la resistencia R_1 es

$$P_1 = I^2R_1 = (2,5)^2 \times 20 = 125 \text{ vatios}$$

La potencia absorbida en la bobina es

$$P_2 = I^2R_2 = (2,5)^2 \times 0,676 = 4,225 \text{ vatios}$$

y la absorbida por el circuito

$$P_T = I^2(R_1 + R_2) = (2,5)^2 \times 20,676 = 129'225 \text{ vatios}$$

4º) El factor de potencia del circuito es

$$\cos\varphi = \frac{P}{IV} = \frac{129'225}{2'5 \times 87} = 0,59$$

=.=.=.=.=.=.=

XVII-10. Una máquina está conectada a una red de corriente alterna de frecuencia f = 50 hertz y tensión eficaz 5000 voltios. La intensidad eficaz que atraviesa la máquina es I = 10 amperios. El factor de potencia es 0'8. Se necesita. por otra parte, que la máquina se comporte como una bobina de autoinducción.

1º) Hallar la impedancia compleja de la máquina en forma compleja

2º) Demostrar que es posible obtener una instalación cuyo factor de potencia sea igual a 1, conectando en paralelo a los bornes de la máquina una impedancia Z', cuyo valor ha de calcularse. Naturaleza de esta impedancia. Calcular también la impedancia equivalente.

****

1º) La impedancia de la máquina es

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{5000}{10} = 500\Omega$$

además

$$\cos\varphi = 0,8 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-0'64}}{0'8} = \frac{0'6}{0'8} = \frac{3}{4}$$

Sea $Z = A + Bj$. Se verificará

$$\left.\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (500)^2 \\ \frac{B}{A} &= \frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= 400 \\ B &= 300 \end{aligned}\right.$$

luego $Z = 400 + 300\,j$

2º) La impedancia equivalente del conjunto, en forma compleja, debe ser real positiva, luego

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z'} = \frac{1}{400+300\,j} + \frac{1}{Z'} = \frac{400-300\,j}{(400)^2+(300)^2} + \frac{1}{Z'}$$

o sea

$$\frac{1}{R} = \frac{400}{400^2+300^2} - \frac{300}{400^2+300^2}j + \frac{1}{Z'}$$

para que el primer miembro sea real se debe verificar

$$\frac{1}{Z'} - \frac{300}{400^2+300^2}j = 0 \Rightarrow \frac{1}{Z'} = \frac{300}{400^2+300^2}j$$

de donde

$$Z' = \frac{400^2+300^2}{300\,j} = -\frac{400^2+300^2}{300}j$$

luego Z' es la impedancia de un condensador de una capacidad C

$$Z' = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{400^2+300^2}{300}$$

o sea

$$C = \frac{300}{2\pi f(400^2+300^2)} = 0'382\ \mu\text{f}.$$

la impedancia equivalente al conjunto será

$$R = \frac{400^2+300^2}{400} = 625\Omega$$

=.=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XVIII

OPTICA GEOMETRICA

XVIII-1. Una regla vertical, AB de $l = 1$ m. de longitud está colocada a $d = 2$ m. de una pared OC y sujeto a ella hay un espejo OM, inclinado 60° del lado de AB

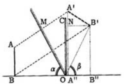
1º) Cúal es la pendiente de la imagen del suelo visto por reflexión en el espejo

2º) Cúal es la altura de las imágenes de los puntos A y B con respecto al suelo.

****

1º) La imagen del suelo, dada por el espejo, es el plano simétrico del suelo con respecto al espejo. El ángulo que el plano imagen formará con el suelo será:

$$\beta = \pi - 2\alpha = 180 - 120 = 60^0$$



para dibujar la imagen bastará dibujar la imagen de un punto del suelo (por ejemplo el B) y unir dicha imagen con O.

2º) La imagen A'B' de la regla AB es simétrica del objeto con respecto al espejo como plano de simetría. Dibujamos el punto A' simétrico de A respecto a OM y uniendo A' con B' tenemos dibujada la imagen de la regla

como $\qquad OB' = OB = d = 2$ m.

tendremos $\qquad B'B'' = OB' \operatorname{sen} \beta = 2 \cdot \operatorname{sen} 60 = \sqrt{3} = 1,732$ m.

La altura de A' sobre el suelo será

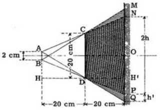
$$A'A'' = A'N + NA'' = A'B' \cdot \cos 60 + B'B'' = 1 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} = 0,5 + 1,732 = 2,232 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-2. Un foco luminoso de forma de disco de 2 cm. de diametro está situado a 20 cm. de una lámina cuadrada opaca de 20 cm. de lado. Determinese el ancho de la sombra y penumbra formados en una pantalla a 20 cm. de la lámina, teniendo todo el sistema un eje común perpendicular a todos sus elementos.

****

En la figura se han delimitado las zonas de sombra y penumbra, trazando los rayos que partiendo de los extremos del disco son tangentes a los lados de la lámina. La zona rayada doblemente es la de sombra y zona de penumbra es la de rayado sencillo



Los triángulo ABD y DPQ son iguales por tener los tres ángulos iguales y la misma altura, luego

$h' = PQ = 2$ cm. $\quad 2h' = 4$ cm. será la anchura de la penumbra.

Los triangulos BHD y PDH' son también iguales, por tanto

$$H'P = BH = 10 - 1 = 9 \text{ cm.}$$

de donde

$$h = OH' + H'P = 10 + \ = 19 \text{ cm.}$$

y la anchura de la sombra

$$2h = 38 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=

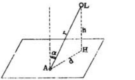
XVIII-3. Una lampara de 32 candelas, está situada a una distancia h de un plano horizontal sobre el que se encuentra una hoja de papel cuyo centro A, está a 732 cm. del pie de la vertical, H. Se pide:

a) El valor de h para que la iluminación en A sea máxima.
b) El valor de la iluminación máxima en A.

****

a) Si llamamos r a la distancia de la lampara al punto A, la iluminación en A viene dada por la expresión

$$E = \frac{I \cos\alpha}{r^2}$$



pero $\quad r = \dfrac{d}{\operatorname{sen}\alpha}$

luego

$$E = I \frac{\cos\alpha}{\dfrac{d^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{I}{d^2} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha$$

derivando con respecto a α, obtenemos

$$E' = \frac{1}{d^2}\left[2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha\right]$$

para obtener el máximo valor de E,

$$2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha = 0 \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 0 & \text{solución imposible} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \end{cases}$$

el valor de h, para un máximo de iluminación en A, será

$$h = \frac{d}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{siendo} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

luego

$$h = \frac{732}{\sqrt{2}} = 518 \text{ cm.}$$

b) El valor de la iluminación máxima

$$E = \frac{I}{d^2} \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha = \frac{32}{7,32^2} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,23 \text{ lux}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-4. Un punto P de la superficie de una mesa está iluminada por tres lamparas de incadescencia cuyos intensidades son: I_1 = 25 bujias, I_2 = = 50 bujias, I_3 = 100 bujias, estando situadas dichas lamparas, respectivamente, a las distancias siguientes sobre la mesa: h_1 = 3 m. h_2 =

= 4 m. h_3 = 3 m. Así mismo los pies de las verticales de dichas lamparas sobre la mesa distan del punto iluminado, respectivamente: a_1 = = 4 m. a_2 = 3 m. a_3 = 4 m.

Se susyituyen las tres lamparas anteriores por una sola de intensidad I = 125 bujias, situada en la vertical del punto iluminado a una distancia h = 5 m. de la mesa.

Suponiendo que el punto de la mesa ha de iluminarse durante t= = 8 horas diarias, que las lamparas consumen una energía electrica de 1 wat./bujia y que el precio del Kw-h. es 0,70 ptas. se pide: ¿Cúal de los dos sistemas anteriores da mejor iluminación y cúal es el valor de esta en uno y otro?

¿Cúal de los dos sistemas es más económico y cuánta será la economía diaria en ptas. utilizando el más barato?

****

Utilizando el primer sistema de iluminación, la iluminación en P será,

$$E = \frac{I_1 \cos \alpha_1}{r_1^2} + \frac{I_2 \cos \alpha_2}{r_2^2} + \frac{I_3 \cos \alpha_3}{r_3^2}$$

siendo
$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + h_1^2} \qquad r_2 = \sqrt{a_2^2 + h_2^2} \qquad r_3 = \sqrt{a_3^2 + h_3^2}$$

y
$$\cos \alpha_1 = \frac{h_1}{r_1} \qquad \cos \alpha_2 = \frac{h_2}{r_2} \qquad \cos \alpha_3 = \frac{h_3}{r_3}$$

sustituyendo en la primera ecuación

$$E = \frac{I_1 h_1}{(a_1^2+h_1^2)^{3/2}} + \frac{I_2 h_2}{(a_2^2+h_2^2)^{3/2}} + \frac{I_3 h_3}{(a_3^2+h_3^2)^{3/2}} = \frac{25 \cdot 3}{25^{3/2}} + \frac{50 \cdot 4}{25^{3/2}} + \frac{100 \cdot 3}{25^{3/2}} = \frac{575}{125} = 4,6 \text{ lux}$$

La iluminación en P, cuando utilicemos la lampara de I = 125 bujias, será:

$$E' = \frac{I}{h^2} = \frac{125}{25} = 5 \text{ lux}$$

conseguimos mejor iluminación con el segundo sistema.

El consumo diario de energia electrica en el primer caso será

$$W_1 = (I_1 + I_2 + I_3)t = 175 \times 8 = 1400 \text{ wat-h} = 1,4 \text{ kw-h.}$$

v sus coste

$$C_1 = 1,4\ 0,7 = 0,98 \text{ ptas.}$$

En el segundo caso

$$W_2 = I\,t = 125\ 8 = 1000 \text{ wat-h} = 1 \text{ km-h}$$

$$C_2 = 0,70 \text{ ptas.}$$

Economizamos 0,28 ptas. cada dia utilizando el segundo sistema de iluminación

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-5.La superficie del agua contenida en un estanque recibe los rayos del Sol (que consideramos reducido a su centro) que forman con el plano horizontal un ángulo cuya tangente es 3/4. Se coloca un poste al borde del estanque, del lado de donde proviene la luz; la altura del poste sobre la superficie del agua es de 12 m.

1°) Representar graficamente la construcción de la sombra del poste sobre el fondo del estanque, supuesto horizontal.

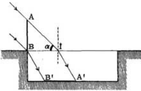
2°) Un observador cuyo ojo está situado sobre la vertical pasando por el borde opuesto del estanque mira el extremo de la sombra del poste; este extremo está tapado por la imagen del Sol dada por reflexión sobre la superficie del estanque. El ojo del observador está a 18 m. por encima de la superficie. El indice del agua es 4/3. La longitud del estanque entre el poste y la vertical del ojo del observador es 70 m.

a) ¿En qué plano debe encontrarse el ojo del observador?

b) ¿Cuál es la profundidad del estanque?

****

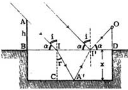
1º) Bastará hallar la intersección con el fondo del estanque, de los rayos luminosos que pasando por los extremos del poste se han refractado al llegar a la superficie del agua.



La longitud de la sombra del poste es

$$A'B' = IB = \frac{AB}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{12}{3/4} = 16 \quad m.$$

2º) a) El rayo A'I' procedente de A' se refracta en a un punto I' y el rayo refractado I'O llega al ojo del observador. Para que la imagen del Sol por reflexión tape a A', el rayo que procedente del Sol se refleje en I' ha de llevar la misma dirección I'O. Pero según las leyes de la reflexión el Sol, el punto I' y el ojo deben estar en un mismo plano, o sea el plano definido por el Sol y el poste AB.



La profundidad la podemos obtener en el triángulo ICA'

$$x = \frac{CA'}{\operatorname{tg} r} \qquad (a)$$

Aplicando la ley de Suell al rayo AI tendremos

$$\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r \quad \Rightarrow \operatorname{sen} r = \frac{\operatorname{sen} i}{n} = \frac{\cos\alpha}{n}$$

pero $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$$

luego $$\operatorname{sen} r = \frac{4/5}{4/3} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{sen} r}{\cos r} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow r = \alpha$$

Por otra parte

$$CA' = \frac{II'}{2} = \frac{BD-BI-I'D}{2} = \frac{BD-\frac{AB}{\operatorname{tg}\alpha}-\frac{OD}{\operatorname{tg}\alpha}}{2} = \frac{70-\frac{12}{3/4}-\frac{18}{3/4}}{2} = 15 \text{ m.}$$

sustituyendo en (a)

$$x = \frac{15}{3/4} = 20 \text{ m.}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-6.Tenemos un prisma de vidrio (índice de refracción $n = \sqrt{2}$) cuyo ángulo es de 60°; en una de sus caras incide un rayo formando un ángulo de 45°, siendo la dirección del mismo hacia el vértice. Determinar:

1º) Angulo de refracción (en el interior del prisma)
2º) Valor del ángulo de emergencia
3º) Angulo de mínima de desviación
4º) Dibujar la marcha de la luz, en el caso de que el rayo incida normalmente a la cara, teniendo en cuenta que el ángulo límite del vidrio al aire es de 42º

****

1º) Apliquemos la ley de Snell al rayo incidente en la primera cara del prisma.

de donde $\quad \frac{1}{S'} = -\frac{2}{R} - \frac{1}{S} = \frac{2}{2} + \frac{1}{189} = \frac{190}{189}$ o sea $S' = \frac{189}{190}$ m.

aplicando la formula del aumento $\quad \frac{y'}{y} = -\frac{S'}{S}$

tendremos

$$y = -y'\frac{S}{S'} = -0,01\frac{-189}{\frac{189}{190}} = 1,90 \text{ m.} \quad \text{altura del guardia}$$

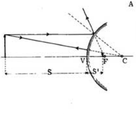
=.=.=.=.=.=.=

XVIII-11. Un espejo esférico convexo, que actúa de retrovisor de un coche parado, proporciona una imagen virtual de un vehículo que se aproxima con velocidad constante. El tamaño de dicha imagen es igual a 1/10 del tamaño real del vehículo cuando éste se encuentra a 8 m. del espejo
a) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?
b) ¿A qué distancia del espejo se forma la correspondiente imagen virtual?
c) Un segundo después la imagen observada en el espejo se ha duplicado. ¿A qué distancia del espejo se encuentra ahora el vehículo?
d) Cuál era su velocidad?

****

a y b) Aplicando la formula del aumento al espejo dado, tendremos

$$A = \frac{y'}{y} = -\frac{S'}{S} = \frac{1}{10} \Rightarrow S' = -\frac{S}{10} = -\frac{-8}{10} = \frac{4}{5} \text{ m.}$$



Aplicando la formula fundamental de los espejos:

$$\frac{1}{S'} + \frac{1}{S} = \frac{2}{R}$$

sustituyendo valores

$$\frac{2}{R} = \frac{5}{4} - \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \Rightarrow R = \frac{16}{9} \text{ m.}$$

c) Sean, ahora, S_1 y S_1' las distancias objeto e imagen, se verificará

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S_1'}{S_1} &= \frac{1}{5} \\ \frac{1}{S_1'} + \frac{1}{S_1} &= \frac{2}{R} = \frac{9}{8} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} S_1' &= -\frac{S_1}{5} \\ -\frac{5}{S_1} + \frac{1}{S_1} &= \frac{9}{8} \Rightarrow S_1 = -\frac{32}{9} \text{ m.} \end{aligned}$$

d) La velocidad será

$$v = \frac{e}{t} = \frac{8 - 32/9}{1} = \frac{40}{9} \text{ m/S}$$

=.=.=.=.=.=.=

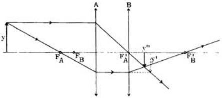
XVIII-12. Dos lentes convergentes A y B de 9 y 15 cm. respectivamente de distancia focal, forman un sistema centrado de tal modo que la lente B está situada en el plano focal de la A. Un objeto de 2 cm. de altura, se sitúa a una distancia de 36 cm. delante de la lente A.

a) Construir gráficamente la imagen del objeto formada por el sistema

b) Determinar la naturaleza, tamaño y distancia de la imagen a la lente B.

****

a) La construcción gráfica es la siguiente



b) Apliquemos la fórmula de las lentes delgadas a la lente A

$$\frac{1}{S'_1} - \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f'_A} \Rightarrow \frac{1}{S'_1} - \frac{1}{-36} = \frac{1}{9} \Rightarrow S'_1 = 12 \text{ cm.}$$

aplicando la fórmula del aumento

$$\frac{y'}{y} = \frac{S'_1}{S_1} \Rightarrow y' = y\,\frac{S'_1}{S_1} = 2\,\frac{12}{-36} = -\frac{2}{3} \text{ cm.}$$

tomando la imagen hallada como objeto para la lente B, tendremos

$$\frac{1}{S'_2} - \frac{1}{(12-9)} = \frac{1}{15} \Rightarrow S'_2 = 2,5 \text{ cm.}$$

luego

$$y'' = y'\,\frac{S'_2}{S_2} = -\frac{2}{3}\,\frac{2,5}{3} = -\frac{5}{9} \text{ cm.}$$

la imagen definitiva es real, invertida y más pequeña que el objeto

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-13. a) Un objeto luminoso está colocado a 4 m. de una pantalla. Una lente L_1, cuya distancia focal no conocemos, da sobre la pantalla una imagen real del objeto tres veces mayor que el objeto

1º) ¿Cuál es la naturaleza de la lente

2º) ¿Cuál es la posición de la lente

3º) Si sesplazamos la lente de tal manera que obtengamos una nueva imagen nítida sobre la pantalla, pero de distinto tamaño que antes ¿cuál es la nueva posición de la lente y el aumento en este caso?

b) Calcular la distancia focal y la convergencia de la lente L_1.
c) Determinar la distancia focal y la convergencia de una lente L_2 que yuxtapuesta a la L_1 solo diera sobre la pantalla una imagen limpia del objeto más que para una sola posición del sistema de las dos lentes yuxtapuestas.

****

1º. a) Si la imagen se recoge en una pantalla ha de ser mayor real y por tanto la lente es convergente

2º. a) La imagen real ha de ser invertida respecto al objeto, luego

$$\frac{y'}{y} = \frac{S'}{S} = -3$$

teniendo en cuenta que la distancia objeto S es negativa, tenemos

$$-S + S' = 4$$

luego $\quad -S-3S = 4 \quad$ y $\quad \underline{S = -1\ m} \quad ; \quad \underline{S' = 3\ m}$

la posición de la lente viene dada por su distancia a la pantalla: 3 m.

3º. a) Un objeto y su imagen ocupan posiciones conjugadas con respecto a la lente, por tanto la posición de la lente que nos dará también imagen nítida será aquella en que

$$S = -3\ m. \qquad y \qquad S' = 1\ m$$

y el nuevo aumento será

$$\frac{y'}{y} = \frac{S'}{S} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

b) Apliquemos la formula de las lentes en una cualquiera de las posiciones anteriores

$$\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} = \frac{1}{f'}$$

o sea $\quad \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{4}{3} \quad$ y $\quad f'_1 = \frac{3}{4} = 0,75\ m.$

la potencia de la lente será

$$\underline{P_1 = \frac{1}{f'} = \frac{4}{3}\ \text{dioptrias}}$$

c) La potencia de las dos lentes yuxtapuestas será: $P_1 + P_2 = P$ para la lente resultante se verifica:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{S'} - \frac{1}{S} = \frac{1}{f'} = P \\ &-S + S' = 4 \end{aligned}\right\} \qquad S^2 + 4S + \frac{4}{P} = O$$

si queremos que solo haya una posición de la lente para la cual obtengamos imagen nítida, la ecuación de segundo grado nos ha de dar una sola solución y por tanto el discriminante ha de ser nulo, o sea

$$\sqrt{16 - \frac{16}{P}} = 0 \qquad P = 1 \text{ dioptría}$$

de donde

$$P_2 = P - P_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \text{ dioptrías}$$

la lente que yuxtaponemos es divergente y su distancia focal es:

$$f'_2 = \frac{1}{P_2} = \underline{-3 \text{ m.}}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-14.a)¿Qué tamaño tiene la imagen de la Luna por una lente biconvexa de vidrio de índice de refracción n = 1,5 que está formada por caras esféricas de radio r = 30 cm.?

b)¿ Cómo se modificaría esta imagen en tamaño y posición al observarla con otra lente cuyo índice de refracción fuera un 10% superior y los radios de sus caras se duplicaran?

Datos: Diametro de la Luna = 4/7 radios terrestres; distancia Luna-Tierra = 59 radios terrestres.

****

a) La distancia focal imagen de la lente será:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1,5-1)\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{-30}\right) = \frac{1}{30}$$

de donde $f' = 30$ cm. $= 0,3$ m.

por estar el objeto muy alejado la imagen se formará en el foco imagen .

Apliquemos la fórmula del aumento de una lente, tendremos

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{S'}{S} \Rightarrow y' = y\,\frac{S'}{S} = \frac{4}{7}R\,\frac{f'}{59R} = 0,29 \text{ cm.}$$

b) El indice de refracción de la nueva lente será

$$n' = n + \frac{10\,n}{100} = \frac{11}{10}n = \frac{11}{10}1,5 = 1,65$$

siguiendo, ahora, el mismo proceso del apartado (a), obtendremos

$$\frac{1}{f'_1} = (1,65-1)\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{-60}\right) = \frac{1,3}{60} \Rightarrow f'_1 = 46,1 \text{ cm.}$$

por tanto

$$y'_1 = \frac{4}{7}R\,\frac{46,1}{59R} = 0,44 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-15. a)¿Cuál es el diámetro de la imagen del Sol producida por una lente convergente de 1 dioptría, sabiendo que la distancia Tierra - Sol es de 150 millones de Km., y que desde la Tierra el diámetro del disco solar subtiende un ángulo de 32 minutos.?

b)¿Qué ocurre con la imagen si la lente se sustituye por otra de 100 dioptrías.?

****

a) El ángulo subtendido por el Sol, en radianes, será

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot 32}{360 \cdot 60} = 0,0093 \quad \text{radianes}$$

por ser, la distancia Tierra-Sol, muy grande, podremos considerar el diametro del Sol como un arco de circunferencia, luego

$$y = R\alpha = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot 9,3 \cdot 10^{-3} = 13,95 \cdot 10^{8} \quad \text{m.}$$

al ser el Sol un objeto muy alejado, su imagen se formará en el foco de la lente, o sea

$$S' = f' = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{m.}$$

Aplicando la fórmula del aumento, obtendremos

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{S'}{S} \Rightarrow y' = y\,\frac{S'}{S} = 13,95 \cdot 10^{8}\,\frac{1}{1,5 \cdot 10^{-11}} = 9,3 \cdot 10^{-3} \quad \text{m.}$$

b) Repitiendo el procedimiento anterior, obtendremos

$$S' = f' = \frac{1}{100} = 10^{-2} \quad \text{m.}$$

por tanto

$$y' = 13,95\,\frac{10^{-2}}{1,5 \cdot 10^{-11}} = 9,3 \cdot 10^{-5} \quad \text{m.}$$

en este caso, el tamaño de la imagen es 100 veces menor que en el primer caso

=.=.=.=.=.=.=

XVIII-16. Una lente plano-convexa, delgada, apoya su cara curva sobre un espejo horizontal. El eje principal de la lente es perpendicular al espejo, Se pide:

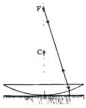
1º) Donde hay que colocar un punto luminoso en el je de la lente para que su imagen coincida con él.

2º) Se coloca un líquido entre el espejo y la lente. ¿Donde hay que colocar ahor el punto para que suceda lo mismo de antes?

Datos: Indice de refracción del vidrio $n = 1,4$
" " " " líquido $n' = 1,3$
Radio de la lente $R = 50$ cm.

****

1º) El punto luminoso habra que ponerlo en el foco objeto de la lente plano-convexa. Los rayos luminosos procedentes de dicho punto saldrán, después de atravesar la lente, paralelos al eje. Incidiran perpendicularmente en el espejo plano y, por tanto, volveran a incidir, en la lente, paralelamente al eje, por último volveran a converger en el foco objeto.

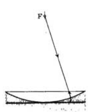


Para situar el foco objeto, calculemos la distancia focal de la lente plano-convexa.

$$\frac{1}{f'_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{1}{f'_1} = (1,4-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-50}\right) = \frac{0,4}{50} \Rightarrow f'_1 = 125 \text{ cm.}$$

El punto luminoso hay que colocarlo a 125 cm. por encima de la lente.

2º) Podemos considerar que el liquido, introducido entre la lente plano-convexa y el espejo plano, hace el mismo papel que una lente plano-cóncava yuxtapuesta a la lente plano-convexa



El punto luminoso habrá que colocarlo en el foco objeto del sistema optico formado por las dos lentes.

La distancia focal de la lente plano-cóncava es:

$$\frac{1}{f'_2} = (1,3-1)\left(\frac{1}{-50} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow f'_2 = -\frac{500}{3} \text{ cm.}$$

La distancia focal del sistema es

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{125} - \frac{3}{500} = \frac{1}{500} \Rightarrow f' = 500 \text{ cm.}$$

El punto luminoso se debe colocar a 5 metros por encima de la lente.

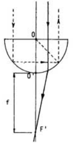
=.=.=.=.=.=.=

XVIII-17. En una capsula de vidrio de forma semiesferica y llena de agua, cae un haz de rayos normalmente a la superficie libre del agua.

1º) Describir la marcha de los rayos luminosos.

2º) Encontrar el foco de los rayos emergentes. Indice del agua = 4/3 , radio curvatura de la capsula = 10 cm.

****



Aplicando la potencia propia de una lente a la capsula de vidrio considerada como tal :

$$\frac{1}{f} = (1-n)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{4}{3}\right)\left[\frac{1}{\infty} + \frac{1}{10}\right]$$

$$\underline{f = -30 \text{ cm}}$$

ó bien aplicando el dioptrico

$$\frac{4/3}{\infty} - \frac{1}{f} = \frac{4/3 - 1}{10}$$

$$\underline{f = -30 \text{ cm.}}$$

-.=.=.=.=.=

XVIII-18. Un miope que se ha hecho présbita tiene una distancia maxima de visión distinta de 100 cm. y su distancia mínima de 40 cm.
1º) ¿Qué lentes L_1 es necesario emplear para que vea perfectamente al infinito sin acomodar? Calcular la convergencia de L_1 2º) Para ver cerca con las mismas gafas se acopla a la parte inferior de cada lente L_1 otra L_2. Calcular su convergencia para que su punto próximo a través de las gafas se reduzca a 20 cm. 3º) La lente L_2 es biconvexa y de caras iguales. Calcular su radio de curvatura si su índice = 3/2.

****

Para que vea sin acomodar:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{100} = \frac{1}{L_1} \Rightarrow L_1 = 100 \text{ cm} \Rightarrow P_1 = 1 \text{ dioptría}$$

Para ver cerca:

$$\frac{1}{40} + \frac{1}{20} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{3}{40} \Rightarrow P_2 = \frac{300}{40} = 7,5 \text{ dioptrías}$$

$$P_2 = P_1 + P_x \quad \Rightarrow \quad P_x = 6,5 \text{ dioptrías}$$

$$6,5 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{-R_1} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{6,5} \text{ m.}$$

$$R = 15,4 \text{ cm.}$$

=.=.=.=.=.=.=

CAPITULO XIX

OPTICA FISICA

XIX-1. Un rayo de luz natural incide sobre la superficie de un sólido con un ángulo de 60°de forma que el rayo reflejado se encuentra totalmente polarizado. Si el índice de refracción del primer medio es 4/3, calcular el índice de refracción del sólido.

****

Para que el rayo reflejado se encuentre totalmente polarizado, el rayo de luz natural incidirá en el sólido según el llamado ángulo de polarización. El ángulo de polarización viene dado por la ley de Brewster:

$$\operatorname{tg} \varphi_P = \frac{n'}{n}$$

por tanto, el índice de refracción del sólido, será:

$$n' = n \operatorname{tg} \varphi_P = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} = 2'308$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIX-2. Un polarizador y un analizador se encuentran orientados de tal forma que la intensidad de la luz transmitida por ellos es máxima. ¿Qué fracción de esta intensidad es transmitida cuando uno de ellos gira un ángulo de 30°?¿Qué ángulo habrá que girar uno de ellos para observar la extinción completa?

****

Cuando la luz natural atraviesa un polarizador y después un analizador tales que sus direcciones de transmisión forman un ángulo θ , la intensidad de la luz transmitida es:

$$I = I_m \cos^2 \theta \qquad \text{(Ley de Malus)}$$

siendo I_m la máxima cantidad de luz transmitida.

Luego: $$I = I_m \cos^2 30 = I_m \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} I_m$$

de donde $$\frac{I}{I_m} = \frac{3}{4} = 0'75$$

Si queremos que $I = 0$ se verificará que $\cos \theta = 0$, o sea $\theta = 90^\circ$. Se dice que el polarizador y el analizador están cruzados.

=.=.=.=.=.=.=.=

XIX-3. a) Un polarizador y un analizador se encuentran orientados de forma que la luz transmitida por ellos es máxima. Entre ambas láminas se coloca una disolución de sustancia ópticamente activa de 2dm. de espesor y se observa que la luz emergente es de intensidad mitad. Calcular el poder rotatorio de la sustancia.
b) Suponiendo que la disolución tuviera una rotación específica $\rho = 66'5° \text{ cm}^3/\text{gr. dm}$. ¿Cuánto valdrá la concentración?

****

a) Aplicando la ley de Malus: $I = I_m \cos^2 \theta$

$$\cos^2 \theta = \frac{I}{I_m} = \frac{I_m/2}{I_m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

luego el poder rotatorio de la sustancia es 45°

b) Aplicando la ley de Biot: $\theta = \rho . l . c$

obtendremos

$$c = \frac{\theta}{\rho \cdot l} = \frac{45^\circ}{66'5 . 2} = 0'338 \text{ gr/cm}^3$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIX-4. Luz de color verde ($\lambda = 5400$ Å) que incide normalmente se difracta en una red que contiene 2000 líneas/cm. Calcular: a) La desviación angular del máximo de tercer orden. b) ¿Puede recogerse el máximo de orden 10?

****

1º) La desviación angular para el máximo de tercer orden será:

$$\text{sen } \varphi_3 = K \frac{\lambda}{e} = 3 \frac{5400 \cdot 10^{-8}}{1/2000} = 0'324 \Rightarrow \varphi_3 = 18^\circ 06'$$

2º) Apliquemos la misma fórmula para obtener el máximo de orden 10

$$\operatorname{sen} \varphi_3 = K \frac{\lambda}{e} = 10 \frac{5400 \cdot 10^{-8}}{1/2000} = 1,08$$

el resultado obtenido es absurdo ya que el seno de un ángulo no puede ser mayor que la unidad. Por tanto, no puede recoger el máximo de orden 10.

=.=.=.=.=.=.=.=

XIX-5. Una red de difracción tiene 1000 rayos/cm. Se ilumina perpendicularmente con una luz de 4500 Å. Hallar: 1º) El máximo orden de difracción posible. 2º) El ángulo de difracción del máximo de 4º orden.

****

1º) La desviación angular para un máximo de orden n es:

$$\operatorname{sen} \varphi_n = K \frac{\lambda}{e} \Rightarrow K = \frac{e}{\lambda} \operatorname{sen} \varphi_n$$

el valor máximo de K se obtiene para $\operatorname{sen} \varphi_n = 1$

Luego

$$K = \frac{1/10^3}{4500 \cdot 10^{-8}} = \frac{100000}{4500} = 22$$

que es el máximo orden de difracción posible en las condiciones del problema.

2º) El ángulo de difracción del máximo de 4º orden será

$$\operatorname{sen} \varphi_4 = K \frac{\lambda}{e} = 4 \cdot \frac{4500 \cdot 10^{-8}}{1/10^3} = 18 \cdot 10^{-2} = 0,18$$

luego $\varphi_4 = 10^{o}\ 22'$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIX-6. Para medir la longitud de onda de una fuente coherente y monocromática se utiliza el experimento de la doble rendija. Se sabe que la distancia entre las rendijas es de 0,8 mm. y que la separación entre dos franjas brillantes consecutivas es de 0,37 mm. cuando la pantalla se sitúa a 0,50 m. Calcular la longitud de onda en Å de la luz utilizada.

****

La posición sobre la pantalla de la franja brillante de orden K viene dada por la expresión

$$y_K = K\,\frac{\lambda D}{a}$$

para calcular la separación entre dos franjas brillantes, demos a K dos valores consecutivos cualesquiera n y n+1, y restemos los valores obtenidos

$$S = y_{n+1} - y_n = (n+1)\frac{\lambda D}{a} - n\frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}$$

despejemos λ, obtendremos

$$\lambda = \frac{Sa}{D} = \frac{0,8\cdot 0,37}{0,5\cdot 10^{-3}} = 592 \text{ mm.} = \underline{5,92\cdot 10^{9}\ \mathring{A}}$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIX-7. Cuál debe ser el espesor mínimo de una pompa de jabón que veremos negra si hacemos incidir sobre ella luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 0,589\,\mu$. El índice de refracción de capa jabonosa para esta longitud de onda es n = 1,38.

****

Si observamos la pompa, como es lógico, por reflexión, la diferencia de marcha entre dos rayos será

$$\delta = 2ne\cos r + \frac{\lambda}{2}$$

la película aparecerá negra si δ es igual a un número impar de semilongitudes de onda (condición de interferencia negativa), o sea

$$\delta = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$$

como la incidencia es normal $\cos r = 1$, y como queremos que el espesor sea mínimo K = 1, tendremos

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2}$$

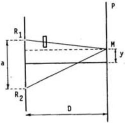
de donde

$$e = \frac{\lambda}{2n} = \frac{0,589}{2\cdot 1,38} = 0,213\ \mu$$

=.=.=.=.=.=.=.=

XIX-8. Supóngase montado el dispositivo de Young para obtener franjas de interferencia. Sea la distancia entre las rendijas practicadas en la pantalla a = 0,5 mm., la luz empleada es monocromática de longitud de onda $\lambda = 0,6\,\mu$. Delante de la rendija superior se coloca una lámina de vidrio de caras paralelas de espesor $e = 10^{-2}$ mm. El índice de refracción del vidrio es n = 1,5. Calcular el valor del desplazamiento de las franjas en una pantalla situada a la distancia D = 1 m. de las rendijas.

Tomando O como origen de ordenadas calculemos la ordenada correspondiente a la franja brillante de orden K, sin tener en cuenta la lámina de caras paralelas



$$\overline{R_1M}^2 = D^2+\left(\frac{a}{2} - y\right)^2$$

$$\overline{R_2M}^2 = D^2+\left(\frac{a}{2} + y\right)^2$$

$$\overline{R_2M}^2 - \overline{R_1M}^2 = 2ay$$

$$\delta = R_2M - R_1M = \frac{2ay}{2D} = \frac{ay}{D}$$

para que se produzca interferencia positiva (franja brillante) es necesario que la diferencia de caminos ópticos sea igual a un número par de semilongitudes de onda, luego :

$$\delta = \frac{ay_k}{D} = K\lambda$$

de donde $y_k = K\,\frac{\lambda D}{a}$

Cuando interpongamos la lámina de caras paralela la diferencia de caminos ópticos será :

$$\delta' = R_2M - (R_1M - e + ne) = R_2M - R_1M - e(n-1) = R_2M - R_1M - 0{,}5e$$

ó también $\quad \delta' = \delta - \frac{e}{2} = \frac{ay}{D} - \frac{e}{2}$

para calcular la ordenada de la franja brillante de orden K, se verificará :

$$\frac{ay'_k}{D} - \frac{e}{2} = K\lambda \qquad \text{de donde} \qquad y'_k = K\frac{\lambda D}{a} + \frac{eD}{2a}$$

el desplazamiento experimentado por la franja, será :

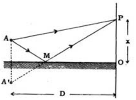
$$\Delta y = y'_k - y_k = \frac{eD}{2a} = \frac{10^{-2}\cdot 10^3}{12\cdot 10^{-1}} = \underline{8{,}3\text{ mm.}}$$

=.=.=.=.=.=.=

XIX-9. Un foco de luz monocromática se encuentra a una distancia a=2mm. sobre un espejo plano. Se coloca una pantalla perpendicular al espejo y situada a una distancia D=50cm. Hallar la posición: a) de la 1ª franja brillante. b) de la 2ª franja oscura. λ=6000 Å

****

Los rayos que interfieren en la pantalla son los rayos directos procedentes de A y los rayos reflejados en el espejo; pudiendo considerar como foco coherente con A, el punto A', imagen dada por el espejo del foco A.



Vamos a calcular la diferencia de marcha de dos rayos que llegan a interferir en P.

$$d_1^2 = \overline{AP}^2 = D^2 + (x-a)^2$$

$$d_2^2 = (\overline{AM} + \overline{MP})^2 = \overline{A'P}^2 = D^2 + (x+a)^2$$

Restando estas igualdades

$$d_2^2 - d_1^2 = 2ax \Rightarrow (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2ax$$

como $d_2 + d_1 \simeq 2D \Rightarrow d_2 - d_1 \simeq \frac{ax}{D}$

Teniendo en cuenta que en la reflexión hay pérdida de una similongitud de onda, la condición para que se produzca un máximo es

$$\frac{ax}{D} = (2K+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = (2K+1)\frac{D\lambda}{2a}$$

para $K = 0$ $\qquad x = \frac{D\lambda}{2a} = \frac{500 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 2} = 0{,}075$ mm.

Análogamente, para que se produzca oscuridad

$$\frac{ax}{D} = 2K\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = K\frac{D\lambda}{a}$$

para $K = 1$ $\qquad x = \frac{D\lambda}{a} = 0{,}15$ mm.

=.=.=.=.=.=.=

XIX-10. Una lente plana convexa, cuya cara curva tiene R = 3m de radio, se coloca sobre un bloque de vidrio plano y horizontal. El conjunto se ilumina por medio de un haz de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 0{,}546\,\mu$. Si la observación se hace por reflexión, calcular: a) El radio del primer anillo oscuro. b) El radio del segundo anillo brillante.

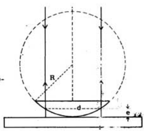
****

Sea e, el espesor de la capa de aire, entre la lente y vidrio plano, que corresponde al anillo de radio r. Aplicando la relación que liga a la altura de un triángulo rectángulo con las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, tendremos

$$r^2 = e(2R-e) = 2Re - e^2 \simeq 2Re$$

ya que e^2 es muy pequeño

de donde $e = \frac{r^2}{2R}$



Teniendo en cuenta que en la reflexión hay una pérdida de una semilongitud de onda, la condición para que se produzca un anillo oscuro, será

$$2e = 2K\frac{\lambda}{2}$$

o sea

$$\frac{r^2}{R} = 2K\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r = \sqrt{KR\lambda}$$

para $K = 1 \Rightarrow r = \sqrt{R\lambda} = \sqrt{3000 \cdot 0,576 \cdot 10^{-3}} = 1,27$ mm.

Para que se produzca un anillo brillante

$$2e = (2K+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{o sea} \quad \frac{r^2}{R} = (2K+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow r = \sqrt{(2K+1)\frac{R\lambda}{2}}$$

para $K = 1 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3R\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}\,3000 \cdot 0,576 \cdot 10^{-3}} = 1,55$ mm.

=.=.=.=.=.=.=

XIX-11. El dispositivo de los espejos de Fresnel para producir interferencias es el indicado en la figura. Se pide: a) Hallar la anchura de las franjas de interferencia. b) Hallar el número N de franjas que se pueden observar. c) Hallar el límite de N cuando SO = R tiende a infinito.

Datos: D = 3m., R = 1m., $\alpha = 15'$., $\lambda = 0,6\mu$. Tómese $1' = 3 \cdot 10^{-4}$ radianes

****

a) En este caso los dos manantiales coherentes que son S_1 y S_2, son las imágenes del foco S dadas por los dos espejos planos

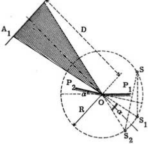
La distancia entre los dos focos coherentes es $\overline{S_1 S_2} = a = 2\alpha R$

La anchura de una franja será

$$e = y_{n+1} - y_n = (n+1)\frac{\lambda(D+R)}{a} - n\frac{\lambda(D+R)}{a} = \frac{\lambda(D+R)}{a} = \frac{\lambda(D+R)}{2\alpha R}$$

sustituyendo valores

$$e = \frac{6 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{2 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3} = 0,26 \text{ mm.}$$



b) Solo se pueden observar interferencias en la zona rayada de la figura.

La anchura de la zona sobre la pantalla es

$$A_1 A_2 = 2\alpha D$$

luego el número de franjas que se observarán es

$$N = \frac{2\alpha D}{e} = \frac{2\alpha D}{\frac{\lambda(D+R)}{2\alpha R}} = \frac{4\alpha^2 R D}{\lambda(D+R)}$$

sustituyendo valores

$$N = \frac{4\cdot 225\cdot 9\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{6}}{6\cdot 10^{-4}\cdot 4\cdot 10^{3}} = 101 \text{ franjas}$$

c) La expresión del número de franjas observado es

$$N = \frac{4\alpha^2 R D}{\lambda(D+R)} = \frac{4\alpha^2}{\lambda}\,\frac{D}{(1+\frac{D}{R})}$$

cuando $\quad R\to\infty \qquad N = \dfrac{4\alpha^2 D}{\lambda}$

o sea $\quad N = \dfrac{4\cdot 225\cdot 9\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{3}}{6\cdot 10^{-4}} = 450$ franjas

=.=.=.=.=.=.=

INDICE

CALCULO INTEGRAL
METODOLOGIA Y PROBLEMAS
F. COQUILLAT

Contiene 546 problemas, 345 detalladamente resueltos y 201 con sus soluciones.

ECUACIONES DIFERENCIALES
METODOS DE CALCULO—PROBLEMAS
V. FRAILE OVEJERO

Contenido: **Funciones valoradas y elementos sobre distribuciones. Ecuaciones diferenciales ordinarias. La transformación de Laplace. Ecuaciones en derivadas parciales. Ecuaciones en diferencias finitas.**

LA FISICA EN PROBLEMAS
FELIX A. GONZALEZ

Contiene 583 problemas, distribuidos en los siguientes capítulos: **Vectores (32 problemas), Cinemática (33), Estática (30), Dinámica (60), Gravitación (23), Geometría de masas (15), Movimiento oscilatorio armónico (27), Fluidos (32), Termología (26), Movimiento ondulatorio (26), Carga, campo y potencial eléctricos (28), Electrostática (27), Corriente continua (32), Electromagnetismo (26), Introducción y autoinducción (23), Corriente alterna (24), Optica geométrica (32), Optica física y fotometría (22), Física moderna (23).—**

PROBLEMAS DE FISICA GENERAL
MANUEL MARTINEZ HERNANDEZ
Profesor Titular de Física (Biofísica) de la
Facultad de Veterinaria de Madrid
FELIX A. GONZALEZ
Licenciado en Ciencias Físicas

Contiene 335 problemas distribuidos de la siguiente forma: **Vectores (22), Cinemática (21), Estática (15), Dinámica (27), Gravitación (8), Geometría de masas (18), Movimiento oscilatorio armónico (14), Elasticidad (10), Mecánica de fluidos (32), Termología (42), Movimiento ondulatorio (15), Carga, campo y potencial eléctricos (18) Condensadores (16), Corriente continua (14), Electromagnetismo (15), Corrientes inducidas (9), Corriente alterna (10), Optica geométrica (18), Optica física (11).**

PROBLEMAS DE ELASTICIDAD, BARRAS, ARCOS Y CROSS
EUFEMIANO SANCHEZ AMILLATEGUI

EJERCICIOS DE FISICA
J.M. RIVAS – J. AYCART – A. RAMOS

Contiene 329 ejercicios totalmente resueltos: **Magnitudes. Medidas. Errores (21 ejercicios).— Cinemática (53).— Estática (39).— Dinámica (55).— Líquidos y gases (30).— Calorimetría (39).— Movimiento ondulatorio. Acústica (47).— Optica (27).**